

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics  
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baldinger E. Baumann R. Mercier P. Scherrer E. Stiefel  
F. Stüssi W. Traupel H. Ziegler  
Redactor: R. Sängler

## INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

ABONYI, I.: Steady State Solution of the Relativistic Boltzmann Transport Equation . . . . .	169
BASSALI, W. A.: The Transverse Flexure of a Thin Circular Plate Subject to Parabolic Loading over a Concentric Ellipse . . . . .	176
FRIEDRICH, J.: Bemerkung zur Abelschen Integralgleichung . . . . .	191
GIBSON, R. E.: A Linear Heat Problem with a Moving Interface . . . . .	198
MEYER ZUR CAPELLEN, W.: Die Harmonischen der Rotationsenergie bei der Schubkurbel und ver- wandte Fourier-Reihen . . . . .	207
NOWINSKI, J.: Cylindrically Orthotropic Circular Plates with Large Deflections . . . . .	218
YEN, K.-T.: Optimal Coordinates for a Simple Shear Flow over a Flat Plate . . . . .	228

## *Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves*

KATZ, U.: Zur Eiskeimbildungsfähigkeit von Kupferoxyden und Kupfersulfiden . . . . .	237
STRNAD, J.: Über die Trennung von Gasgemischen in laminarer Strömung. . . . .	245
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques. . . . .	247

Z A M P	Vol. XI	Fasc. 3	Pag. 169-248	25. 5. 60
---------	---------	---------	--------------	-----------

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics  
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées  
ZAMP

Redaktor/Editor/rédacteur: Prof. Dr. R. Sängler, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

AUG 5 60

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 12 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 8 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurzen Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Autoren von Originalarbeiten, welche einen Umfang von mehr als 16 Druckseiten aufweisen, haben einen *Satzbeitrag* zu entrichten. Dieser beträgt sFr. 25.- pro Seite von der 17. bis 24. Seite, sFr. 40.- pro Seite von der 25. bis 32. Seite und sFr. 50.- pro Seite von der 33. Seite an. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hand of the editor at least 12 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical should be addressed to the Editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 8 weeks before publication of the issue, if the authors dispense with proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* should be added a brief summary in a language other than the original one. Drawings and photographs for *illustrations* should be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; lettering on the illustrations should be entered in pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. Authors of *Original Papers* exceeding 16 printed pages are requested to pay a *contribution* of Sw.Frs. 25.- per page for pages 17-24, Sw.Frs. 40.- per page for pages 25-32, and Sw.Frs. 50.- per page for pages 33 and over. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free separata prints without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: trois mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés huit semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langues française, anglaise, allemande ou italienne; cependant, chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. Le légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Pour articles originaux qui dépassent 16 pages imprimées, une *contribution* de frs. s. 25.- par page doit être payée pour les pages 17-24 et de frs.s. 40.- par page pour les pages 25-32; à partir de page 33 la contribution est de frs. s. 50.- par page. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement (6 Nummern): Schweizer Fr. 68.- (DM 68.-), Einzelnummer sFr. 14.-  
Annual subscription (6 issues): Swiss francs 68.- (DM 68.-), single copy Sw. Frs. 14.-  
Abonnement annuel (6 numéros): Francs suisses 68.- (DM 68.-), le numéro frs.s. 14.-

Inserate - Advertisements - Annonces:  $\frac{1}{4}$  Seite/page: Fr./DM 165.-,  $\frac{1}{2}$  Seite/page: Fr./DM 88.-,  
 $\frac{3}{4}$  Seite/page: Fr./DM 50.-

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. - All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. - Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.



# Steady State Solution of the Relativistic Boltzmann Transport Equation<sup>1)</sup>

IVAN ABONYI, Budapest, Hungary<sup>2)</sup>

## Introduction

A detailed study of the Maxwellian velocity distribution function was made by F. JÜTTNER [1]<sup>3)</sup> as early as in 1911 from the point of view of relativistic mechanics. JÜTTNER's treatment is based on a generalisation of the familiar phase-space method in which the Liouville theorem holds for the motions described by the relativistic equations of motion [2]. Then the distribution function is determined in the usual combinatorial way.

Here we propose to follow another line of thought. Namely, we start from the relativistic Boltzmann transport equation given by CLEMMOW and WILLSON [3] and KEN-ITI GOTO [4] and complete it with the collision integral. Then we try to find the steady state solution of this equation.

## The Relativistic Boltzmann Transport Equation

Let  $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$  denote the distribution function of a system consisting of  $N$  identical particles,  $\mathbf{r}$  the position and

$$\mathbf{u} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}} \quad (1)$$

the reduced velocity of the particles ( $c$  being the velocity of light in vacuo). We note that

$$\left[1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2\right]^{-1/2} = (1 + \mathbf{u}^2)^{1/2}.$$

The particles of rest mass  $m_0$  obey the relativistic equations of motion

$$m_0 c \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (2)$$

<sup>1)</sup> A part of these calculations was carried out while the author was the guest of the Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Firenze whose kind hospitality is gratefully acknowledged.

<sup>2)</sup> Institute for Theoretical Physics, Eötvös University.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 175.

where  $\mathbf{F}$  is the ordinary force vector. The relativistic Boltzmann transport equation as given by CLEMMON and WILLSON is

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{c}{\sqrt{1+u^2}} (\mathbf{u} \cdot \nabla) f + \frac{1}{m_0 c} \{(\mathbf{F} \cdot \nabla_u) + (\nabla_u \cdot \mathbf{F})\} f = \left( \frac{\Delta f}{\Delta t} \right)_{coll}, \quad (3)$$

where  $\nabla_u$  is the gradient operating on the functions of  $\mathbf{u}$ ,  $(\Delta f / \Delta t)_{coll.}$  represents the change in the value of  $f$  produced by collisions during a time interval of unit length (invariant collision integral). CLEMMOW and WILLSON neglect the expression  $(\Delta f / \Delta t)_{coll.}$  because they do not take into account the role of the collisions. Though their approximation is appropriate for many practical applications, a more precise treatment of certain theoretical and practical problems demands closer consideration of this term.

As is well known from text-books of statistical mechanics [5], for the motions described by the Newtonian equations of motion the collision integral can be written in the form

$$\left( \frac{\Delta f}{\Delta t} \right)_{coll.}^{cl.} = \iint (\bar{f} \bar{f}' - f f') g I(g, \vartheta) d\Omega d\mathbf{v}', \quad (4)$$

where  $f = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  is the distribution function for the system, and

$$f' = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}'), \quad \bar{f} = f(t, \mathbf{r}, \bar{\mathbf{v}}), \quad \bar{f}' = f(t, \mathbf{r}, \bar{\mathbf{v}}'), \quad (5)$$

$\mathbf{v}$  and  $\mathbf{v}'$ ,  $\bar{\mathbf{v}}$  and  $\bar{\mathbf{v}}'$  being the respective velocities of the colliding particles long before and long after the encounter;  $I(g, \vartheta)$  is the differential cross section of the collision; and

$$g = |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|.$$

Remembering the deduction of (4), it is easy to see that (4) is valid also in the case of relativistic motions described by (2). The only change to be made is the substitution for the ordinary velocity  $\mathbf{v}$  of the reduced velocity  $\mathbf{u}$ . Then the relativistic form of the collision integral is

$$\left( \frac{\Delta f}{\Delta t} \right)_{coll.}^{rel.} = \iint (\bar{f} \bar{f}' - f f') g I(g, \vartheta) d\Omega d\mathbf{u}', \quad (6)$$

where  $g = |\mathbf{u} - \mathbf{u}'|$ , and

$$f = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}), \quad f' = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}'), \quad \bar{f} = f(t, \mathbf{r}, \bar{\mathbf{u}}), \quad \bar{f}' = f(t, \mathbf{r}, \bar{\mathbf{u}}'), \quad (7)$$

$\mathbf{u}$  and  $\mathbf{u}'$ ,  $\bar{\mathbf{u}}$  and  $\bar{\mathbf{u}}'$  being the respective reduced velocities of the particles long before and long after the collisions.

CLEMMOW and WILLSON have pointed out that the left hand side of (3) is an invariant scalar with respect to the Lorentz transformations. It is easy to see also that (6) is an invariant scalar.

So the complete Boltzmann transport equation in relativistic form looks like

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{c}{\sqrt{1+u^2}} (\mathbf{u} \cdot \nabla) f + \frac{1}{m_0 c} \{ (\mathbf{F} \cdot \nabla_u) + (\nabla_u \cdot \mathbf{F}) \} f \\ = \iint (\bar{f} \bar{f}' - f f') g I(g, \vartheta) d\Omega du' \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

In general – even in the case of the velocity-dependent Lorentz force – the term containing

$$\nabla_u \cdot \mathbf{F}$$

makes no contribution, and we shall therefore omit it in the following.

### Determination of the Steady State Solution

We may call a state steady when

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

and when the collision integral has no effect on the distribution; in other words, when the state is not changed either by the time or by the collisions. These two suppositions made, we have to solve the differential equation

$$\frac{c}{\sqrt{1+u^2}} (\mathbf{u} \cdot \nabla) f + \frac{1}{m_0 c} (\mathbf{F} \cdot \nabla_u) f = 0. \quad (9)$$

Later we shall have to demonstrate, that the solution of (9) is consistent with the second supposition, i.e., that the solution makes the collision integral zero.

For the time being we shall confine ourselves to one spatial direction and conservative velocity-independent forces only. Then the differential equation to be solved is

$$c u (1+u^2)^{-1/2} \frac{\partial f}{\partial x} + (m_0 c)^{-1} F(x) \frac{\partial f}{\partial u} = 0. \quad (10)$$

This can be separated. Supposing a solution of the form

$$f(x, u) = A(x) \cdot B(u)$$

we get

$$\frac{1}{F(x)} \cdot \frac{A'(x)}{A(x)} = - \frac{(1+u^2)^{1/2}}{u m_0 c^2} \cdot \frac{B'(u)}{B(u)} = a,$$

from which we easily compute that

$$f(x, u) = b \exp \left\{ -a m_0 c^2 \sqrt{1+u^2} - a V(x) \right\}.$$



Here  $V(x) = -\int F(x) dx$ , and  $a$  and  $b$  are the constants of integration to be determined later. In the general case we find that

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = b \exp\left\{-a m_0 c^2 \sqrt{1 + \mathbf{u}^2} - a V(\mathbf{r})\right\}. \quad (11)$$

We can compute  $S$ , the entropy of the system under consideration, with the help of the distribution function in the form

$$S = -k \iint f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \log f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) d\mathbf{r} d\mathbf{u},$$

where  $k$  is the Boltzmann constant and the integration is extended over the whole phase space. Then denoting

$$N = \iint f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) d\mathbf{r} d\mathbf{u}, \quad (12)$$

$$E = N \bar{E} = \iint \left\{ m_0 c^2 \sqrt{1 + \mathbf{u}^2} + V(\mathbf{r}) \right\} f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) d\mathbf{r} d\mathbf{u}, \quad (13)$$

we obtain

$$S = -k N \log b + a k E.$$

Taking into account the well-known thermodynamic relationship between energy  $E$ , entropy  $S$  and absolute temperature  $T$ :

$$\left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_V = \frac{1}{T},$$

we can conclude that

$$a = \frac{1}{k T}. \quad (14)$$

In order to see the meaning of the other constant of integration we consider that we are describing a system consisting of  $N$  identical particles. The total number of particles, in the case of zero potential energy, is given by

$$N = \iint f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) d\mathbf{r} d\mathbf{u} = b V \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{m_0 c^2}{k T} \sqrt{1 + \mathbf{u}^2}\right\} d\mathbf{u},$$

where  $V$  is the volume of the system. Performing a polar transformation of the variables of integration, we arrive at

$$N = 4 \pi b V \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{m_0 c^2}{k T} \sqrt{1 + u^2}\right\} u^2 du,$$

$u$  being the length of the vector  $\mathbf{u}$ . Let

$$\alpha = i \frac{m_0 c^2}{k T} \quad \text{and} \quad u = \text{sh } \varphi,$$

then

$$N = 4 \pi b V \int_0^{\infty} \exp\{i \alpha \operatorname{ch} \varphi\} \operatorname{sh}^2 \varphi \operatorname{ch} \varphi d\varphi$$

$$= \pi b V \int_0^{\infty} \exp\{i \alpha \operatorname{ch} \varphi\} (\operatorname{ch} 3 \varphi - \operatorname{ch} \varphi) d\varphi.$$

This integral can be evaluated with the help of the following formula [6]:

$$\int_0^{\infty} \exp\{i z \operatorname{ch} t\} \operatorname{ch} p t dt = \frac{\pi i}{2} e^{-p(\pi i/2)} H_p^{(1)}(z) \quad (15a)$$

which is valid for  $0 \leq \arg z \leq \pi$  and  $p > 0$ . Here  $H_p^{(1)}$  is the Hankel function of the first kind with the index  $p$ , obeying the following recurrence formulae:

$$\left. \begin{aligned} z H_{p-1}^{(1)}(z) + z H_{p+1}^{(1)}(z) &= 2p H_p^{(1)}(z), \\ H_{p-1}^{(1)}(z) - H_{p+1}^{(1)}(z) &= 2 \frac{d}{dz} H_p^{(1)}(z). \end{aligned} \right\} \quad (15b)$$

So  $N$  can be computed to be

$$N = \frac{\pi^2}{2} b V \{H_1^{(1)}(\alpha) + H_3^{(1)}(\alpha)\} = \frac{2 \pi^2 b V}{\alpha} H_2^{(1)}(\alpha). \quad (16)$$

Then

$$b = \frac{N}{V} (2 \pi^2)^{-1} \frac{\alpha}{H_2^{(1)}(\alpha)} = \frac{N}{V} (2 \pi^2)^{-1} \frac{i \frac{m_0 c^2}{k T}}{H_2^{(1)}\left(i \frac{m_0 c^2}{k T}\right)}. \quad (17)$$

And so the distribution function of the steady state is

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = (2 \pi^2)^{-1} \frac{N}{V} \cdot \frac{i \frac{m_0 c^2}{k T}}{H_2^{(1)}\left(i \frac{m_0 c^2}{k T}\right)} \exp\left\{-\frac{1}{k T} (m_0 c^2 \sqrt{1 + \mathbf{u}^2} + V(\mathbf{r}))\right\}. \quad (18)$$

It is easy to see that the collision integral (6) vanishes for this solution. One can demonstrate this statement by direct substitution, taking into account the fact that in the collision the normal components of the reduced velocities change their sign. So we can conclude that this solution is the appropriate one.

In general, we have to use the complicated expression (18) which can be evaluated for a given value of  $m_0 c^2/kT$  by using tables of the Hankel functions. But in the limiting case, when  $m_0 c^2/kT \gg 1$  we can obtain explicit results without such difficulties, making use of the asymptotic form of the Hankel

functions valid for large values of the argument:

$$H_2^{(1)}(ix) = i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-x}, \quad (19)$$

$x$  being real and positive. Then we obtain instead of (17)

$$b = \frac{N}{V} \left( \frac{m_0 c^2}{2 \pi k T} \right)^{3/2} \exp \left\{ \frac{m_0 c^2}{k T} \right\} \quad (20)$$

and so the distribution function in this approximation becomes

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \frac{N}{V} \left( \frac{m_0 c^2}{2 \pi k T} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_0 c^2}{k T} (\sqrt{1 + \mathbf{u}^2} - 1) \right\}. \quad (21)$$

This may be called the relativistic Maxwellian velocity distribution function. In order to see its connection with the non-relativistic function, we transform the expression

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) d\mathbf{r} d\mathbf{u}$$

into a function of  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{v}$ . Evidently

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{r} d\mathbf{v} = f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial(\mathbf{v})} d\mathbf{r} d\mathbf{v},$$

where  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  is the distribution function with the new arguments and  $\partial(\mathbf{u})/\partial(\mathbf{v})$  the Jacobian of the substitution. Taking into account that

$$\mathbf{u} = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}},$$

we easily compute  $\partial(\mathbf{u})/\partial(\mathbf{v})$  to be

$$c^{-3} \left[ 1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2 \right]^{-5/2}.$$

So we see that

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) d\mathbf{r} d\mathbf{v} = \frac{N}{V} \left( \frac{m_0 c^2}{2 \pi k T} \right)^{3/2} \left[ 1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2 \right]^{-5/2} \exp \left\{ -\frac{m_0 c^2}{k T} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}} - 1 \right) \right\} d\mathbf{r} d\mathbf{v} \quad (22)$$

which is exactly that given by JÜTTNER [1].

### Remarks

Here we may call the attention of the reader to an already well-known result, namely, that in general the law of the equipartition of the energy loses its meaning in relativistic statistics, because we cannot write the relativistic



kinetic-energy as a homogeneous quadratic form of the velocity variables. In an unspecified case of  $m_0 c^2/kT$  with zero potential energy, using (13), (15a) and (15b), one obtains the average total energy of the particle in the form

$$\bar{E} = kT \left( 1 - i \frac{m_0 c^2}{kT} \cdot \frac{H_2^{(1)'} \left( i \frac{m_0 c^2}{kT} \right)}{H_2^{(1)} \left( i \frac{m_0 c^2}{kT} \right)} \right)$$

(dash denotes differentiation with respect to the whole argument). Even in the case  $m_0 c^2 \gg kT$  this expression gives

$$\bar{E} = \frac{3}{2} kT + m_0 c^2.$$

### REFERENCES

- [1] F. JÜTTNER, *Ann. Physik* **34**, 856 (1911).
- [2] W. PAULI, *Teoria della relatività* (Torino 1958), p. 204.
- [3] P. C. CLEMMOW and A. J. WILLSON, *Proc. Cambr. Phil. Soc.* **53**, 222 (1957).
- [4] KEN-ITI GOTO, *Progr. theor. Phys.* **20**, 1 (1958).
- [5] E. W. MONTROLL, *Principles of Statistical Mechanics and Kinetic Theory of Gases*, in: *Handbook of Physics*, edited by E. V. CONDON and H. ODISHAW (New York 1958).
- [6] W. MAGNUS und F. OBERHETTINGER, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik* (Berlin 1948), p. 38.

### Résumé

Depuis les travaux de JÜTTNER [1], nous connaissons la forme relativiste de la fonction de répartition maxwellienne des vitesses. Le traité de JÜTTNER est basé sur une généralisation de la méthode de l'extension en phases, de sorte que le théorème de Liouville est valable par rapport aux équations relativistes de mouvement. La fonction de répartition est déterminée par la méthode combinatoire usuelle.

Ici, nous proposons de suivre une autre voie. Partant d'une forme relativiste de l'équation de transport de Boltzmann donnée par CLEMMOW et WILLSON [3] et KEN-ITI GOTO [4], nous proposons une expression relativiste de l'intégrale de collision qui complète cette équation, et nous donnons ensuite sa solution pour l'état stationnaire.

(Received: August 21, 1959.)

# The Transverse Flexure of a Thin Circular Plate Subject to Parabolic Loading over a Concentric Ellipse

By W. A. BASSALI, Alexandria, Egypt<sup>1)</sup>

## 1. Introduction

The behaviour of transversely loaded elastic plates has for several years been the subject of much research. Many analyses have appeared of cases where the boundary of the plate is rigidly clamped, simply supported, or free, and the plate is under various distributions of normal thrust; excellent bibliographies are to be found in MUSKHELISHVILI'S book [1]<sup>2)</sup> and at the end of a recent paper by DEVERALL [2]. The problem has been extensively investigated in a series of papers [3, 4, 5, 6] for a thin circular plate subject to different types of loading over a concentric or an eccentric circle, when the edge of the plate is elastically restrained according to a general boundary condition which includes the rigidly clamped and simply supported boundaries as particular cases. When the boundary of the circular plate is free, and the plate is subject to symmetrical or uniformly varying pressures over an eccentric circle and is supported at several interior or boundary points, exact solutions for the problem have been developed by the author [7, 8] through the application of MUSKHELISHVILI'S complex variable method. Appropriate expressions for the complex potentials, deflections and stresses have also been established [9, 10] for an elastically restrained circular plate which is partially loaded over a sector or over a segment of the plate. In two recent papers [11, 12] the bending of the same plate has been discussed, when uniform or hydrostatic loadings are distributed over the surface of an ellipse concentric with the plate. Making use of MUSKHELISHVILI'S complex variable solution of the first boundary-value problem in the theory of elasticity for elliptic plates ([1], p. 244), SAPONDZĬYAN [13] has determined the transverse deflection of a clamped elliptic plate uniformly loaded over a concentric circle or over a confocal ellipse.

In this paper we follow the same procedures adopted in the two previous papers [11, 12], in order to derive the complex potentials which solve the problem of an elastically restrained circular plate subject to parabolic loading extending over the area of a concentric ellipse. Standard formulae for the complex combinations of stress components are used in the computation of the

<sup>1)</sup> Department of Applied Mathematics, Faculty of Science, University of Alexandria.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 190.

boundary and central values of the bending, twisting moments and shearing forces. The two limiting cases in which the loaded elliptic patch becomes a circle or a line ellipse are also considered.

## 2. Basic Equations

Let  $C$  denote the boundary of a thin circular plate, of centre  $O$  and radius  $c$ , made of isotropic homogeneous material whose Poisson's ratio is  $\eta$  and YOUNG's modulus is  $E$ . If  $2h$  is the thickness of the plate then its flexural rigidity is known to be given ([14], p. 3) by

$$D = 2E \frac{h^3}{3(1-\eta^2)}. \quad (2.1)$$

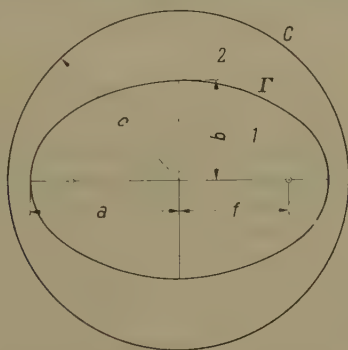
Let  $z = x + iy = re^{i\theta}$  be any point in the mid-plane of the plate which is chosen as the plane  $Z = 0$  of a rectangular Cartesian frame  $O(x, y, z)$ . We assume that the plate is divided into the two regions 1 and 2 by the contour  $\Gamma$  of the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (0 \leq b \leq a \leq c), \quad (2.2a)$$

and we write

$$d^2 = a^2 + b^2, \quad f^2 = a^2 - b^2 = a^2 \varepsilon^2, \quad (2.2b)$$

where  $\varepsilon$  is the eccentricity of the ellipse (see figure). If  $p_j(z, \bar{z})$  ( $j = 1, 2$ ) are the



transverse load intensities at points of regions 1 (inside  $\Gamma$ ) and 2 (between  $\Gamma$  and  $C$ ) then, according to the Poisson-Kirchhoff theory of the bending of thin plates ([14], p. 88), the small transverse displacements  $w_j$  ( $j = 1, 2$ ), measured in the upward direction  $OZ$ , at the point  $z$  satisfy the Lagrange partial differential equations<sup>3)</sup>

$$D \nabla^4 w_j(z, \bar{z}) = -p_j(z, \bar{z}) \quad (j = 1, 2), \quad (2.3)$$

<sup>3)</sup> Bars are used to denote conjugate complex quantities.



where  $\nabla^2$  denotes the Laplacian operator  $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 = 4 \partial^2/\partial z \partial \bar{z}$ . The general solutions of equations (2.3) may be expressed in terms of four analytic functions  $\Omega_j(z)$ ,  $\omega_j(z)$  ( $j = 1, 2$ ), usually called the complex potentials and two particular integrals  $W_j(z, \bar{z})$  corresponding to the load intensities  $p_j(z, \bar{z})$ :

$$w_j = \bar{z} \Omega_j(z) + z \bar{\Omega}_j(\bar{z}) + \omega_j(z) + \bar{\omega}_j(\bar{z}) + W_j(z, \bar{z}) \quad (j = 1, 2). \quad (2.4)$$

Adopting STEVENSON's nomenclature<sup>4)</sup> and method of specification of stress [15] the bending, twisting moments and shearing forces at any point  $z$  of the plate are furnished by

$$\tilde{r}\theta - \tilde{\theta}r = -4(1 + \eta) P \left[ 2 \operatorname{Re} \Omega'_j(z) + \frac{\partial^2 W_j}{\partial z \partial \bar{z}} \right], \quad (2.5a)$$

$$\tilde{r}\theta + \tilde{\theta}r - 2i\tilde{\theta}\theta = -4(1 - \eta) P \left[ z \Omega''_j(z) + \frac{z^2 (\omega''_j + W''_j)}{r^2} \right], \quad (2.5b)$$

$$\tilde{r}Z - i\tilde{\theta}Z = -8P \left( \frac{z}{r} \right) \left[ \Omega''_j(z) + \frac{\partial^3 W_j}{\partial z^2 \partial \bar{z}} \right], \quad (2.5c)$$

where the plate modulus  $P$  denotes LOVE's flexural rigidity  $D$  divided by the thickness of the plate,  $\operatorname{Re}$  stands for the real part and the primes on  $\Omega_j$ ,  $\omega_j$ , and  $W_j$  designate differentiation with respect to  $z$ .

The transition conditions expressing the continuity of the deflections, slopes, moments and shears at any point on  $\Gamma$  may be taken as

$$[w]_2^1 = \left[ \frac{\partial w}{\partial z} \right]_2^1 = \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} \right]_2^1 = \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial \bar{z}} \right]_2^1 = 0. \quad (2.6)$$

These conditions have been found extremely helpful in treating problems concerning partially and normally loaded thin circular plates (see References [3-12]).

### 3. Boundary Conditions and Boundary Values of Moments and Shears

Along the circular boundary  $C$  of the plate we shall assume that

$$w = 0, \quad \frac{\tilde{r}\theta}{\tilde{\theta}r} = \frac{\beta + \lambda}{\beta - \lambda}, \quad (3.1)$$

<sup>4)</sup> The relations between STEVENSON's notations [15] and those used by TIMOSHENKO [14] are

$$M_n = -2h\tilde{n}s, \quad M_s = 2h\tilde{s}n, \quad M_{ns} = -M_{sn} = 2h\tilde{s}s = -2h\tilde{n}n, \\ Q_n = -2h\tilde{n}Z, \quad Q_s = -2h\tilde{s}Z,$$

$2h$  being the thickness of the plate.

where  $\lambda$  is a dimensionless restraining parameter and  $\beta = (1 - \eta)/(1 + \eta)$ . It was proved [3, 9] that the conditions (3.1) imply that

$$w = 0, \quad c \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\tilde{r}\tilde{\theta}}{\eta - \nu} = \frac{\tilde{\theta}r}{\eta \nu - 1} = -\frac{P}{c} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{4P}{\nu - 1} \left[ 2 \operatorname{Re} \Omega_2'(z) + \frac{\partial^2 W_2}{\partial z \partial \bar{z}} \right], \quad (3.3)$$

$$\frac{\tilde{\theta}\tilde{\theta}}{1 - \eta} = \frac{c \tilde{\theta}\tilde{Z}}{1 - \nu} = -\frac{P}{c} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta}, \quad (3.4)$$

$$\operatorname{Re} \left[ 2\Omega_2' + \frac{\partial^2 W_2}{\partial z \partial \bar{z}} - \lambda \left\{ z \Omega_2'' + \frac{z^2 (\omega_2'' + W_2'')}{c^2} \right\} \right] = 0, \quad (3.5)$$

along  $C$ , where

$$\nu = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}, \quad \infty \geq \nu \geq \eta, \quad 1 \geq \lambda \geq -\beta. \quad (3.6)$$

The boundary  $C$  is clamped or simply supported according as  $\lambda = 1$  ( $\nu = \infty$ ) or  $\lambda = -\beta$  ( $\nu = \eta$ ), respectively. Equations (3.3) and (3.4) are convenient in computing the boundary values of the moments and shearing force  $\tilde{\theta}\tilde{Z}$ . The boundary value of the shearing force  $\tilde{r}\tilde{Z}$  can be calculated by using (2.5c). All these equations have the advantage of not involving the complex potential  $\omega_2(z)$ .

#### 4. Complex Potentials for a Thin Circular Plate under Parabolic Loading over a Concentric Ellipse

In two previous papers [11, 12] the particular integrals and complex potentials corresponding to the load intensities  $p_1(z, \bar{z}) = \text{constant}$ ,  $p_0$ ,  $p_2 = 0$  and  $p_1(z, \bar{z}) = p_0 x = p_0 (z + \bar{z})/2$ ,  $p_2 = 0$  have been completely determined. We now deal with the case

$$p_1(z, \bar{z}) = p_0 r^2 = p_0 z \bar{z}, \quad p_2(z, \bar{z}) = 0. \quad (4.1)$$

In this case the total load on the plate is easily seen to be  $\pi p_0 a b d^2/4$  and the particular integrals may be taken as

$$W_1(z, \bar{z}) = -\frac{1}{9} k z^3 \bar{z}^3, \quad W_2(z, \bar{z}) = 0, \quad (4.2)$$

where

$$k = \frac{p_0}{64 D} = \frac{p_0}{128 h P}. \quad (4.3)$$

It is known that the conformal transformation

$$z = \frac{1}{2} [(a+b)\zeta + (a-b)\zeta^{-1}] \quad (4.4)$$

maps  $\Gamma$  on the boundary of the unit circle in the  $\zeta$ -plane. The point  $\zeta$  corresponding to the point  $z$  on  $\Gamma$  is therefore given by

$$\zeta = \frac{z+Z}{a+b}, \quad \zeta^{-1} = \frac{z-Z}{a-b}, \quad (4.5)$$

where<sup>5)</sup>

$$Z^2 = z^2 - f^2. \quad (4.6)$$

Substituting from (4.2) in (2.4) and introducing the resulting expressions in the continuity conditions (2.6) we find, using (4.4) and noticing that along  $\Gamma$  we have  $\bar{\zeta} = \zeta^{-1}$

$$[\bar{z}\Omega(z) + z\Omega(\bar{z}) + \omega(z) + \bar{\omega}(\bar{z})]_2^1 = \frac{1}{9} k z^3 \bar{z}^3 = \frac{1}{576} k [2d^2 + f^2(\zeta^2 + \zeta^{-2})]^3, \quad (4.7)$$

$$\left. \begin{aligned} & [\bar{z}\Omega'(z) + \bar{\Omega}(\bar{z}) + \omega'(z)]_2^1 \\ &= \frac{1}{3} k z^2 \bar{z}^3 = \frac{1}{96} k [(a-b)\zeta + (a+b)\zeta^{-1}] [2d^2 + f^2(\zeta^2 + \zeta^{-2})]^2, \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

$$[\Omega'(z) + \Omega'(\bar{z})]_2^1 = k z^2 \bar{z}^2 = \frac{1}{16} k [2d^2 + f^2(\zeta^2 + \zeta^{-2})]^2, \quad (4.9)$$

$$[\Omega''(z)]_2^1 = 2k z \bar{z}^2 = \frac{1}{4} k [(a-b)\zeta + (a+b)\zeta^{-1}] [2d^2 + f^2(\zeta^2 + \zeta^{-2})]. \quad (4.10)$$

From (4.4) we deduce that

$$\frac{d}{dz} = \frac{2}{(a+b) - (a-b)\zeta^{-2}} \cdot \frac{d}{d\zeta}, \quad (4.11)$$

and hence (4.10) gives

$$\left[ \frac{d}{d\zeta} \Omega'(z) \right]_2^1 = \frac{1}{8} k \zeta^{-1} [4ab + f^2(\zeta^2 - \zeta^{-2})] [2d^2 + f^2(\zeta^2 + \zeta^{-2})]. \quad (4.12)$$

Integrating (4.12) and introducing for convenience the notations

$$u_n = \zeta^n + \zeta^{-n}, \quad v_n = \zeta^n - \zeta^{-n} \quad (4.13)$$

we immediately get

$$\left[ \Omega'(z) \right]_2^1 = \frac{1}{8} k \left[ 8ab d^2 \log \zeta + \frac{1}{4} f^4 u_4 + f^2 d^2 u_2 + 2ab f^2 v_2 + K_1 \right], \quad (4.14)$$

<sup>5)</sup> No confusion need arise between this definition of  $Z$  and the third dimension of the plate as expressed in the stresses  $r\bar{Z}$ ,  $\theta\bar{Z}$ ,  $x\bar{Z}$ , and  $y\bar{Z}$ , since the third dimension  $Z$  only arises in such stresses.



where  $K_1$  is a real constant<sup>6)</sup> to be determined. Substituting from (4.14) in (4.9) we conclude that  $K_1 = d^2 (3a^2 + b^2)/2$ , and hence, using (4.11), equation (4.14) becomes

$$\left. \begin{aligned} [\Omega'(z)]_2^1 &= \left[ \frac{2}{a+b-(a-b)\zeta^{-2}} \cdot \frac{d}{d\zeta} \Omega(z) \right]_2^1 \\ &= \frac{1}{8} k \left[ 8ab d^2 \log \zeta + \frac{1}{4} f^4 u_4 + f^2 d^2 u_2 + 2ab f^2 v_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} d^2 (3a^2 + b^2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

The integration of (4.15) yields

$$\left. \begin{aligned} [\Omega(z)]_2^1 &= \frac{1}{16} k \left[ 16ab d^2 z \log \zeta + \frac{1}{20} f^4 (a u_5 + b v_5) \right. \\ &\quad + \frac{1}{12} f^2 \{ a (3a^2 + 13b^2) u_3 + b (13a^2 + b^2) v_3 \} \\ &\quad + \frac{1}{2} a (a^4 - 8a^2 b^2 - 17b^4) u_1 \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} b (15a^4 + 8a^2 b^2 + b^4) v_1 + K_2 \right], \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

where  $K_2$  is an arbitrary constant that may be complex. From (4.4), (4.15) and (4.16) it is found that

$$\left. \begin{aligned} [\bar{z}\Omega'(z) + \bar{\Omega}(z)]_2^1 &= \frac{1}{16} k \left[ \frac{3}{10} f^4 (a u_5 - b v_5) \right. \\ &\quad + \frac{1}{6} f^2 \{ a (9a^2 - b^2) u_3 + b (a^2 - 9b^2) v_3 \} \\ &\quad \left. + a (3a^4 - 11b^4) u_1 + b (9a^4 - b^4) v_1 + \bar{K}_2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Subtracting (4.17) from (4.7) leads to

$$\left. \begin{aligned} [\omega'(z)]_2^1 &= \left[ \frac{2}{a+b-(a-b)\zeta^{-2}} \cdot \frac{d}{d\zeta} \omega(\zeta) \right]_2^1 \\ &= \frac{1}{24} k \left[ f^4 \left\{ \frac{1}{5} (b v_5 - a u_5) - a u_3 - b v_3 \right\} \right. \\ &\quad + a (17b^4 + a^2 b^2 - 2a^4) u_1 \\ &\quad \left. - b (b^4 + a^2 b^2 + 14a^4) v_1 - \frac{3}{2} \bar{K}_2 \right], \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

<sup>6)</sup> A pure imaginary constant  $iK$  in  $[\Omega'(z)]_2^1$  contributes a term  $iKz$  to  $\Omega_1(z)$  or  $\Omega_2(z)$  and can therefore be dropped since it makes no contribution to  $w$ .

which, on integration, gives

$$[\omega(z)]_2^1 = \frac{1}{48} k \left[ 4 a b (6 a^4 + a^2 b^2 + b^4) \log \zeta \right. \\ \left. - f^2 \left\{ \frac{1}{2} (a^4 + 17 a^2 b^2 - 2 b^4) u_2 + 8 a b d^2 v_2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{5} f^4 (d^2 u_4 + 3 a b v_4) - \frac{1}{30} f^6 u_6 - 3 \bar{K}_2 z + K_3 \right\} \right], \quad (4.19)$$

where  $K_3$  is a constant of integration. Since a pure imaginary constant in  $\omega(z)$  leads to  $w = 0$  everywhere it follows that  $K_3$  may be taken as real. Inserting (4.16) and (4.19) in the remaining transition condition (4.7) we deduce that

$$K_3 = \frac{1}{3} d^2 (7 b^4 + 107 a^2 b^2 - 2 a^4). \quad (4.20)$$

From (2.4) it follows that the terms

$$\frac{1}{16} k K_2 \quad \text{and} \quad -\frac{1}{16} k \bar{K}_2 z$$

entering in (4.16) and (4.19) contribute nothing to  $w$  and can accordingly be ignored. Introducing the value of  $K_3$  from (4.20) in (4.19) we finally see that the transition conditions along  $\Gamma$  are satisfied by taking

$$[\Omega(z)]_2^1 = \frac{1}{16} k \left[ 16 a b d^2 z \log \zeta - \frac{1}{2} a (17 b^4 + 8 a^2 b^2 - a^4) u_1 \right. \\ \left. - \frac{1}{2} b (15 a^4 + 8 a^2 b^2 + b^4) v_1 \right. \\ \left. + \frac{1}{12} f^2 \left\{ a (3 a^2 + 13 b^2) u_3 + b (13 a^2 + 3 b^2) v_3 \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{20} f^4 (a u_5 + b v_5) \right], \quad (4.21)$$

$$[\omega(z)]_2^1 = \frac{1}{48} k \left[ 4 a b (6 a^4 + a^2 b^2 + 9 b^4) \log \zeta \right. \\ \left. + \frac{1}{3} d^2 (7 b^4 + 107 a^2 b^2 - 2 a^4) \right. \\ \left. - f^2 \left\{ \frac{1}{2} (a^4 + 17 a^2 b^2 - 2 b^4) u_2 + 8 a b d^2 v_2 \right\} \right. \\ \left. - \frac{1}{5} f^4 (d^2 u_4 + 3 a b v_4) - \frac{1}{30} f^6 u_6 \right]. \quad (4.22)$$

Substituting for  $\zeta$  and  $\zeta^{-1}$  from (4.5) in (4.21), (4.22) and remembering the definitions of  $u_n$  and  $v_n$  given in (4.13) we obtain, after considerable reduction

$$[\Omega(z)]_2^1 = k a b \left[ F(z) + d^2 \left\{ z \log \frac{z+Z}{a+b} - Z G(z) \right\} \right], \quad (4.23)$$

$$[\omega(z)]_2^1 = k a b \left[ H(z) + \frac{1}{12} a^2 f^2 \left\{ (16\alpha - 19 + 9\alpha^{-1}) \log \frac{z+Z}{a+b} - Z K(z) \right\} \right], \quad (4.24)$$

where

$$Z = (z^2 - f^2)^{1/2}, \quad \alpha = \frac{a^2}{f^2} = \varepsilon^{-2}, \quad (4.25)$$

$$F(z) = a b z \left[ 1 + \frac{1}{8} \alpha^{-1} - \frac{4 z^2}{3 f^2} + (8\alpha - 8 + \alpha^{-1}) \frac{z^4}{10 f^2 b^2} \right], \quad (4.26)$$

$$G(z) = \frac{1}{15} \left( 16 - \frac{7 z^2}{f^2} + \frac{6 z^4}{f^4} \right), \quad (4.27)$$

$$H(z) = \frac{1}{2} a b d^2 \left[ 1 - \frac{z^2}{4 a^2} + \frac{8 z^4}{3 f^4} - 4 (16\alpha - 16 + \alpha^{-1}) \frac{z^6}{45 f^4 b^2} \right], \quad (4.28)$$

$$K(z) = \left( \frac{z}{5 f^2} \right) \left\{ \begin{aligned} & [48\alpha - 63 + 49\alpha^{-1} + 4 (88\alpha - 88 + 9\alpha^{-1}) \frac{z^2}{3 f^2} \\ & - 16 (16\alpha - 16 + 3\alpha^{-1}) \frac{z^4}{3 f^4} ] \end{aligned} \right\}. \quad (4.29)$$

Letting  $b$  tend to  $a$  and  $\varepsilon$  tend to zero in equations (4.21), (4.22) or equations (4.23), (4.24) we find that they simplify considerably to

$$[\Omega(z)]_2^1 = \frac{1}{2} k z a^4 \left[ 4 \log \frac{z}{a} - 3 \right], \quad (4.30)$$

$$[\omega(z)]_2^1 = \frac{2}{9} k a^6 \left[ 6 \log \frac{z}{a} + 7 \right]. \quad (4.31)$$

It is now immediately checked that (4.30) and (4.31) are in agreement with equations (2.13) and (2.16) of [7], p. 732 in the special case  $z_0 = 0$ ,  $n = 4$ .

We now introduce the notations<sup>7)</sup>

$$f' = \frac{c^2}{f}, \quad Z' = (f'^2 - z^2)^{1/2}. \quad (4.32)$$

<sup>7)</sup> Accents in equation (4.32) do not indicate differentiation with respect to  $z$ .



Assuming that  $n$  and  $s$  are any two integers including zero it can be easily proved that along  $C$  we have

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{z}{f} \right)^n \left( \frac{Z}{f} \right)^s \right] &= \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{f'}{z} \right)^n \left( \frac{Z'}{z} \right)^s \right], \\ \operatorname{Re} \left[ \bar{z} Z \left( \frac{z}{f} \right)^n \right] &= \operatorname{Re} \left[ \bar{z} Z' \left( \frac{f'}{z} \right)^{n-1} \right], \\ \left| \frac{u(Z' + f')}{z + Z} \right| &= 1 \left( u = \frac{f}{c} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Since the expressions involving  $Z$  in equations (4.23), (4.24) are not uniform<sup>8)</sup> inside  $I'$  (region 1) we deduce that these expressions should enter into  $\Omega_2(z)$ ,  $\omega_2(z)$ , respectively and not in  $\Omega_1(z)$ ,  $\omega_1(z)$ . Moreover, since we require  $w_2$  to vanish on  $C$  it follows that these expressions containing  $Z$  have to be associated with other terms involving  $Z'$  such that  $\operatorname{Re} [\bar{z} \Omega_2(z) + \omega_2(z)]$  vanishes along  $C$ . Equations (4.33) are applied in the derivation of the appropriate expressions to be added and the continuity conditions imply that they should appear in  $\Omega_1(z)$ ,  $\omega_1(z)$  as well as in  $\Omega_2(z)$ ,  $\omega_2(z)$ . It is found that these additional expressions containing  $Z'$  have poles at  $z = 0$ . Terms involving negative powers of  $z$  have therefore to be added in  $\Omega_1(z)$ ,  $\omega_1(z)$  in order to remove these singularities at  $z = 0$ . To satisfy the transition conditions, these negative power terms must also occur in  $\Omega_2(z)$  and  $\omega_2(z)$ . Equations (4.33) are then used to combine them with the appropriate positive powers of  $z$  so as to get zero deflection on  $C$ . Carrying out the foregoing procedure we find that the appropriate forms for the complex potentials  $\Omega_2(z)$ ,  $\omega_2(z)$  may now be written as

$$\left. \begin{aligned} \Omega_2(z) = k a b \left[ z \varphi(z) + d^2 \left\{ z \log \frac{u(Z' + f')}{z + Z} + Z G(z) - Z' L(z) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{5} \left( \frac{f'^4}{z^3} - \frac{z^5}{f^4} \right) - \frac{2}{3} \left( \frac{f'^2}{z} - \frac{z^3}{f^2} \right) \right\} \right], \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_2(z) = k a b \left[ -c^2 \varphi(z) + \frac{1}{12} a^2 i^2 \left\{ (16\alpha - 19 + 9\alpha^{-1}) \log \frac{u(Z' + f')}{z + Z} \right. \right. \\ + Z K(z) - Z' T(z) + 3(3\alpha^{-1} - 1) \left( \frac{f'^2}{z^2} - \frac{z^2}{f^2} \right) \\ + 4(8\alpha - 8 + \alpha^{-1}) \left( \frac{f'^4}{z^4} - \frac{z^4}{f^4} \right) \\ \left. \left. - \frac{16}{15} (16\alpha - 16 + 3\alpha^{-1}) \left( \frac{f'^6}{z^6} - \frac{z^6}{f^6} \right) \right\} \right], \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

<sup>8)</sup> The two branches of  $Z = (z^2 - f^2)^{1/2}$  interchange when  $z$  describes a closed path round either focus of the ellipse  $I'$ .

where  $\varphi(z)$  is a function regular within region 2 and

$$L(z) = \frac{1}{15} \left( \frac{16z}{f^2} - \frac{7f'}{z} + \frac{6f'^3}{z^3} \right), \quad (4.36)$$

$$T(z) = \frac{f'}{5z^2} \left[ 48\alpha - 63 + 49\alpha^{-1} + 4(88\alpha - 88 + 9\alpha^{-1}) \frac{f'^2}{3z^2} - 16(16\alpha - 16 + 3\alpha^{-1}) \frac{f'^4}{3z^4} \right]. \quad (4.37)$$

Adding (4.34) to (4.23) and (4.35) to (4.24) we get

$$\Omega_1(z) = k a b \left[ z\varphi(z) + F(z) + d^2 \left\{ z \log \frac{u(Z' + f')}{a + b} - Z' L(z) + \frac{2}{5} \left( \frac{f'^4}{z^3} - \frac{z^5}{f^4} \right) - \frac{2}{3} \left( \frac{f'^2}{z} - \frac{z^3}{f^2} \right) \right\} \right], \quad (4.38)$$

$$\omega_1(z) = k a b \left[ -c^2 \varphi(z) + H(z) + \frac{1}{12} a^2 f^2 \left\{ (16\alpha - 19 + 9\alpha^{-1}) \log \frac{u(Z' + f')}{a + b} - Z' T(z) + 3(3\alpha^{-1} - 1) \left( \frac{f'^2}{z^2} - \frac{z^2}{f^2} \right) + 4(8\alpha - 8 + \alpha^{-1}) \times \left( \frac{f'^4}{z^4} - \frac{z^4}{f^4} \right) - \frac{16}{15} (16\alpha - 16 + 3\alpha^{-1}) \left( \frac{f'^6}{z^6} - \frac{z^6}{f^6} \right) \right\} \right]. \quad (4.39)$$

Since the function  $\varphi(z)$  appears in  $\Omega_1(z)$ ,  $\omega_1(z)$  as well as in  $\Omega_2(z)$ ,  $\omega_2(z)$  it follows that this function must be regular all over the entire plate. We have now to determine  $\varphi(z)$  from the boundary condition (3.5) in which we put  $W_2 = 0$ .

The following terminology has been introduced in a previous paper [12] and will be used here. If  $f(t)$  is a meromorphic function of the complex variable  $t$  ( $|t| \leq u < 1$ ) which has a single pole of order  $s$  at  $t = 0$  with principal part

$$g(t) = \sum_{n=1}^s \frac{a_n}{t^n},$$

then

$$\text{Reg } f(t) = f(t) - g(t). \quad (4.40)$$

Adopting this notation and applying (4.33) it can be shown from equations (4.34)–(4.37) that along  $C$  we obtain after some algebraic manipulation

$$\text{Re } \Omega_2'(z) = k a b \text{Re} \left[ \{z\varphi'(z)\}' + d^2 \left\{ 1 + \frac{16}{15} \text{Reg} \frac{Z'^3}{f' z^2} \left( 2 + \frac{3f'^2}{z^2} \right) \right\} \right], \quad (4.41)$$

$$\text{Re } [z\Omega_2''(z)] = k a b \text{Re} \left[ \{z^2\varphi'(z)\}' + d^2 \left\{ 1 + \frac{16}{15} \text{Reg} \frac{Z'^3}{f' z^2} \left( 2 + \frac{3f'^2}{z^2} \right) \right\} \right], \quad (4.42)$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{z^2}{c^2}\omega_2''(z)\right] = -k a b \operatorname{Re}\left[z^2\varphi''(z) + \frac{a^2 f^2}{12 c^2}\left\{16\alpha - 19 + 9\alpha^{-1}\right.\right. \\ \left. + \frac{4}{5}\operatorname{Reg}\frac{f'Z'}{z^2}\left(64\alpha - 79 + 47\alpha^{-1}\right.\right. \\ \left. + 16(12\alpha - 12 + \alpha^{-1})\frac{f'^2}{z^2}\right. \\ \left. \left. - 16(16\alpha - 16 + 3\alpha^{-1})\frac{f'^4}{z^4}\right)\right\}\right]. \quad (4.43)$$

Inserting these expressions in (3.5) with  $W_2 = 0$  leads to

$$\operatorname{Re}\left[\varphi + (1 - \lambda)z\varphi'(z) + \left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right)d^2\left\{1 + \frac{16}{15}\operatorname{Reg}\frac{Z'^3}{f'z^2}\left(2 + \frac{3f'^2}{z^2}\right)\right\}\right. \\ \left. + \frac{\lambda a^2 f^2}{24 c^2}\left\{16\alpha - 19 + 9\alpha^{-1} + \frac{4}{5}\operatorname{Reg}\frac{f'Z'}{z^2}\left(64\alpha - 79 + 47\alpha^{-1}\right.\right.\right. \\ \left. \left. + 16(12\alpha - 12 + \alpha^{-1})\frac{f'^2}{z^2} - 16(16\alpha - 16 + 3\alpha^{-1})\frac{f'^4}{z^4}\right)\right\}\right] = 0 \quad (4.44)$$

on  $C$ . This can be satisfied by equating the expression between the square brackets to  $iK_4$  where  $K_4$  is a real constant that can be ignored since it makes no contribution to  $w$ . Introducing for convenience

$$t = \frac{z}{f}, \quad \varphi(z) = \psi(t), \quad m = (1 - \lambda)^{-1} = \frac{1}{2}(1 + \nu) > 0, \quad (4.45)$$

we get the linear differential equation

$$t\psi'(t) + m\psi(t) = \gamma + \sum_{j=0}^3 \gamma_j \operatorname{Reg}[t^{-2j}(1 - t^2)^{1/2}], \quad (4.46)$$

where

$$\left. \begin{aligned} -\gamma &= \frac{1}{2}(m+1)d^2 + \frac{1}{24}(m-1)(16 - 19\alpha^{-1} + 9\alpha^{-2})\frac{a^4}{c^2}, \\ \gamma_0 &= \frac{16}{15}(m+1)d^2, \\ \gamma_1 &= \frac{1}{15}\left[8(m+1)d^2 - \frac{1}{2}(m-1)(64 - 79\alpha^{-1} + 47\alpha^{-2})\frac{a^4}{c^2}\right], \\ \gamma_2 &= -\frac{8}{5}\left[(m+1)d^2 + (m-1)\left(4 - 4\alpha^{-1} + \frac{1}{3}\alpha^{-2}\right)\frac{a^4}{c^2}\right], \\ \gamma_3 &= \frac{8}{15}(m-1)(16 - 16\alpha^{-1} + 3\alpha^{-2})\frac{a^4}{c^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$



For a clamped boundary  $\lambda = 1$ ,  $m = \infty$  and the function  $\varphi(z)$  is immediately obtained by putting  $\lambda = 1$  in the expression between the square brackets in (4.44) and equating the result to zero.

In the general case where  $m \neq \infty$  the solution of (4.46) is

$$\psi(t) = \frac{\gamma}{m} + \sum_{j=0}^3 \gamma_j S^j(t) + K_5 t^{-m},$$

where

$$S^j(t) = t^{-m} \int_0^t t^{m-1} \operatorname{Reg}[t^{-2j} (1-t^2)^{1/2}] dt \quad (j = 0, 1, 2, 3), \quad (4.48)$$

and  $K_5$  is a constant of integration which, since  $m > 0$ , must be zero, so that  $\psi(t)$  becomes regular at  $t = 0$ . From (4.40) we have

$$\operatorname{Reg}[t^{-2j} (1-t^2)^{1/2}] = t^{-2j} \left[ (1-t^2)^{1/2} - \sum_{n=0}^{j-1} c_n t^{2n} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+j} t^{2n} \quad (j \geq 0), \quad (4.49)$$

where

$$c_0 = 1, \quad c_1 = -\frac{1}{2}, \quad c_n = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!} \quad (n > 1). \quad (4.50)$$

Introducing (4.49) in (4.48) we obtain

$$S^j(t) = t^{-m} \int_0^t t^{m-2j-1} \left[ (1-t^2)^{1/2} - \sum_{n=0}^{j-1} c_n t^{2n} \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^j t^{2n}, \quad (4.51)$$

where

$$\delta_n^j = \frac{c_{n+j}}{2^n n + m} \quad (j = 0, 1, 2, 3). \quad (4.52)$$

We therefore have

$$\varphi(z) = \psi(t) = \frac{\gamma}{m} + \sum_{j=0}^3 \gamma_j S^j(t) = \frac{\gamma}{m} + \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n t^{2n}, \quad (4.53)$$

where

$$\delta_n = \sum_{j=0}^3 \gamma_j \delta_n^j = \frac{\gamma_0 c_n + \gamma_1 c_{n+1} + \gamma_2 c_{n+2} + \gamma_3 c_{n+3}}{2^n n + m}. \quad (4.54)$$

The integral in (4.51) can be written in the equivalent form

$$S^j(t) = t^{-m} \int_0^1 v (1-v^2)^{m/2-j-1} \left\{ v - \sum_{n=0}^{j-1} c_n (1-v^2)^n \right\} dv, \quad (4.55)$$

and for even positive integral values of  $m$  it can be easily evaluated in terms of elementary functions. This corresponds to values of the restraining parameter  $\lambda$  of the form  $1 - n^{-1}$  where  $n$  is an even positive integer. Having obtained the function  $\varphi(z)$ , the particular integrals (4.2) and the complex potentials (4.34)–(4.39) corresponding to the boundary conditions (3.2) and to the load (4.1) over the concentric ellipse are now completely determined. With these values inserted in (2.4) the deflection at any point of the plate may be computed.

### 5. Central Values of Deflection, Moments and Shears

Letting  $z$  tend to zero in (4.39) and (4.37) we find that the deflection at the centre of the plate is furnished by

$$w_1(0) = 2\omega_1(0) = 2kab \left[ H(0) - c^2\varphi(0) + \frac{1}{12}a^4 \left\{ \frac{20}{3} - \frac{49}{6}\varepsilon^2 + 5\varepsilon^4 \right\} + (16 - 19\varepsilon^2 + 9\varepsilon^4) \log \frac{2c}{a+b} \right] \quad (5.1)$$

Substituting for  $H(0)$  from (4.28) and for  $\varphi(0)$  from (4.53), (4.54), (4.50), (4.47) and using the value of  $m$  given in (4.45) we obtain

$$w_1(0) = \frac{p_0 ab}{64D} \left[ \frac{1}{6}a^4 \left\{ \frac{20}{3} - \frac{49}{6}\varepsilon^2 + 5\varepsilon^4 + (16 - 19\varepsilon^2 + 9\varepsilon^4) \left( \log \frac{2c}{a+b} - \frac{1}{2}\lambda \right) \right\} + (a^2 + b^2) \{ab + (\lambda - 2)c^2\} \right] \quad (5.2)$$

Setting  $z = 0$  in equations (2.5) leads to

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}\tilde{x}_0 &= \tilde{y}\tilde{y}_0 = \tilde{x}\tilde{Z}_0 = \tilde{y}\tilde{Z}_0 = 0, \\ \tilde{x}\tilde{y}_0 - \tilde{y}\tilde{x}_0 &= -8(1 + \eta) P\Omega'_1(0), \\ xy_0 + \tilde{y}\tilde{x}_0 &= -4(1 - \eta) P\omega''_1(0). \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

From (4.38) and (4.39) it can be shown after some straightforward calculations that

$$\left. \begin{aligned} \Omega'_1(0) &= kab \left[ d^2 \left( \log \frac{2c}{a+b} - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4} \right) + ab \left( 1 + \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right) + \frac{\lambda a^4}{24c^2} (16 - 19\varepsilon^2 + 9\varepsilon^4) \right], \\ \omega''_1(0) &= \frac{1}{2}ka^3b \left[ 1 - \frac{b}{2a}d^2 - \varepsilon^2 \left\{ 3 + \frac{2(\lambda - 2)d^2 + (2 - 19\varepsilon^2/8 + \varepsilon^4)a^4/c^2}{(3 - 2\lambda)c^2} \right\} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

With these values introduced in (5.3) the bending moments  $\tilde{x}\tilde{y}_0$  and  $\tilde{y}\tilde{x}_0$  are determined.

## 6. Boundary Values of Slope, Moments and Shears

Substituting from (4.41) in (3.3) and remembering that  $W_2 = 0$  and  $k = p_0/(128 h P)$  we find the following formulae for the boundary values of the bending moments and slope:

$$\left. \begin{aligned} \frac{r\tilde{\theta}}{\eta - \nu} = \frac{\tilde{\theta}r}{\eta \nu - 1} = -\frac{P}{c} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=c} = \frac{p_0 a b}{16 (\nu - 1) h} \\ \times \operatorname{Re} \left[ \{z \varphi(z)\}' + d^2 + \frac{16}{15} d^2 \operatorname{Re} \frac{Z'^3}{f' z^2} \left( 2 + \frac{3 f'^2}{z^2} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

where  $z = c e^{i\theta}$ . Inserting the value of  $\varphi(z)$  given by (4.53) we see that the right side of (6.1) may be written as

$$\frac{p_0 a b}{16 (\nu - 1) h} \left[ d^2 + \frac{\gamma}{m} + \sum_{n=0}^{\infty} \delta'_n u^{2n} \cos 2 n \theta \right], \quad (6.2)$$

where  $u = f/c$ ,

$$\delta'_n = (2n + 1) \delta_n + \frac{16}{15} d^2 (3 c_{n+2} - c_{n+1} - 2 c_n), \quad (6.3)$$

and  $\gamma, c_n, \delta_n$  are given by (4.47), (4.50), (4.54), respectively. Differentiating (6.2) with respect to  $\theta$  gives

$$-\frac{P}{c} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right)_{r=c}$$

and hence from (3.4) we get for the boundary values of the twisting moment  $\tilde{\theta\theta}$  and the shearing force  $\tilde{\theta Z}$

$$\frac{\tilde{\theta\theta}}{1 - \eta} = \frac{c \tilde{\theta Z}}{1 - \nu} = \frac{p_0 a b}{8 (1 - \nu) h} \sum_{n=1}^{\infty} n \delta'_n u^{2n} \sin 2 n \theta. \quad (6.4)$$

There remains the determination of the boundary value of the shearing force  $\tilde{rZ}$  by substituting from (4.42) in (2.5c) which yields

$$(\tilde{rZ})_{r=c} = -\frac{p_0 a b}{16 h c} \operatorname{Re} \left[ \{z^2 \varphi'(z)\}' + d^2 + \frac{16}{15} d^2 \operatorname{Re} \frac{Z'^3}{f' z^2} \left( 2 + \frac{3 f'^2}{z^2} \right) \right], \quad (6.5)$$

and substituting from (4.53) we obtain

$$(\tilde{rZ})_{r=c} = -\frac{p_0 a b}{16 h c} \left[ d^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \delta''_n u^{2n} \cos 2 n \theta \right], \quad (6.6)$$

where

$$\delta''_n = 2n(2n + 1) \delta_n + \frac{16}{15} d^2 (3 c_{n+2} - c_{n+1} - 2 c_n). \quad (6.7)$$



## 7. Limiting Cases

As a check on the validity of the foregoing results we deduce as a limiting case the complex potentials corresponding to the same boundary conditions (3.2) and the same loading (4.1) distributed over the area of a concentric circle. Letting  $b$  tend to  $a$  and  $\alpha (= \varepsilon^{-2})$  tend to infinity in equations (4.34)–(4.39) leads after reduction to

$$\Omega_1(z) = \frac{p_0 a^4 z}{32 D} \left[ \frac{1}{4} + \lambda \left( \frac{a^2}{3 c^2} - \frac{1}{2} \right) - \log \frac{a}{c} \right], \quad (7.1)$$

$$\omega_1(z) = - \frac{p_0 a^6}{32 D} \left[ \frac{1}{3} \lambda - \frac{7}{9} + \left( 1 - \frac{1}{2} \lambda \right) \frac{c^2}{a^2} + \frac{2}{3} \log \frac{a}{c} \right], \quad (7.2)$$

$$\Omega_2(z) = \frac{p_0 a^4 z}{32 D} \left[ 1 + \lambda \left( \frac{a^2}{3 c^2} - \frac{1}{2} \right) - \log \frac{z}{c} \right], \quad (7.3)$$

$$\omega_2(z) = - \frac{p_0 a^6}{32 D} \left[ \frac{1}{3} \lambda + \left( 1 - \frac{1}{2} \lambda \right) \frac{c^2}{a^2} + \frac{2}{3} \log \frac{z}{c} \right], \quad (7.4)$$

which agree with the expressions obtained by putting  $s = 4$  and  $s' = 6$  in equations (3.39) and (3.40) of [3], page 15. Expressions for the central values of the deflection and moments and the boundary values of the slope, moments and shears immediately follow by letting  $b$  tend to  $a$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) in the results of sections 5 and 6 and it is easily verified that the formulae obtained coincide with those given<sup>9</sup>) on page 597 of [4] in the special case  $n = 2$ .

In the limiting case when the minor axis of the loaded elliptic patch tends to zero we have a line loading with variable load intensity  $p$  extending along the real axis from  $x = -a$  to  $x = a$ . Assuming that  $b$  tends to zero and  $p_0$  tends to  $\infty$  such that  $2b p_0$  tends to  $p_1$  it is seen that the intensity  $p$  of this line loading at any point distant  $x$  from the centre is given by

$$p = p_1 x^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{1/2}. \quad (7.5)$$

The complex potentials appropriate to this line loading are immediately obtained by putting  $p_1/2$  instead of  $b p_0$ ,  $f = a$ ,  $f' = c^2/a$ ,  $d^2 = a^2$  and  $\alpha = 1$  in equations (4.34), (4.35), (4.27), (4.29), (4.53), (4.54), and (4.47).

## REFERENCES

- [1] N. I. MUSKHELISHVILI, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, 3rd ed. (Moscow 1949).
- [2] L. I. DEVERALL, J. appl. Mech. 24, 295 (1957).

<sup>9</sup>) There are two misprints in these formulae. The term  $(b'^2 + r^2) \log v$  in equation (73i) must be replaced by  $2(b'^2 + r^2) \log v$  and the factor  $-\lambda$  entering in equation (75 i) must be written as  $+\lambda$ .

- [3] W. A. BASSALI and R. H. DAWOUD, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt 21, 1 (1957).
- [4] W. A. BASSALI and R. H. DAWOUD, Proc. Camb. phil. Soc. 52, 584 (1956).
- [5] W. A. BASSALI, Proc. Camb. phil. Soc. 52, 734 (1956).
- [6] W. A. BASSALI, Proc. Camb. phil. Soc. 52, 742 (1956).
- [7] W. A. BASSALI, Proc. Camb. phil. Soc. 53, 728 (1957).
- [8] W. A. BASSALI, Proc. Camb. phil. Soc. 54, 265 (1958).
- [9] W. A. BASSALI and R. H. DAWOUD, J. appl. Mech. 25, 37 (1958).
- [10] W. A. BASSALI and M. NASSIF, J. appl. Mech. 26, 44 (1959).
- [11] W. A. BASSALI and M. NASSIF, Proc. Camb. phil. Soc. 55, 101 (1959).
- [12] W. A. BASSALI, Proc. Camb. phil. Soc. 55, 110 (1959).
- [13] O. M. SAPONDZYAN, Akad. Nauk. Armyn. SSR. Izv. Fiz. Mat. Estest. Thehn. Nauki 7, 19 (1954).
- [14] S. TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells* (New York 1940).
- [15] A. C. STEVENSON, Phil. Mag. 34 (7), 105 (1943).

### Zusammenfassung

Auf der Basis der Poisson-Kirchhoffschen Theorie und unter Verwendung der komplexen Methode werden die Durchbiegungen und Spannungen in einer dünnen isotropen Platte unter einer parabolischen Belastung ermittelt, die sich über die Fläche einer konzentrischen Ellipse erstreckt. Der Rand der Platte ist einer elastischen Bindung unterworfen, welche Auflage und Einspannung als Sonderfälle enthält. Es werden auch Grenzfälle der erhaltenen Lösung diskutiert.

(Received: October 8, 1959.)

## Bemerkung zur Abelschen Integralgleichung

Von JOACHIM FRIEDRICH, Berlin, Deutschland<sup>1)</sup>

1. Die nachstehende Bemerkung bezieht sich auf eine Verallgemeinerung der Integralgleichung

$$I(x) = 2 \int_x^{R_0} \frac{i(r) r dr}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (1)$$

vom Abelschen Typ. Gleichung (1) stellt den Zusammenhang zwischen der seitlich beobachteten Strahldichtevertelung  $I(x)$  und der radialen Abhängigkeit der Strahlungsleistung je Volumeneinheit  $i(r)$  der zylindrischen Säule eines elektrischen Lichtbogens dar. Sie wurde zuerst von HÖRMANN [1]<sup>2)</sup> hergeleitet; ihre Lösung

$$i(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{R_0} \frac{I'(x) dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Osram-Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 197.

ist von ihm ohne Angabe des Lösungsweges mitgeteilt und später mehrfach zitiert worden [2-6].

In gleicher Weise ist auch der Zusammenhang zwischen der Leuchtdichte  $B(x)$  [ $\text{cd}/\text{cm}^2$ ] und der radialen Abstrahlung je Volumeneinheit  $I^*(r)$  [ $\text{cd}/\text{cm}^3$ ] eines zylindrischen Bogens durch die Gleichungen (1), (2) gegeben [7, 8]. Dieser Zusammenhang wird zumeist dazu benutzt, mittels eines numerischen Verfahrens [1, 2, 9], vermöge seitlich beobachteter Messwerte für  $I(x)$  bzw.  $B(x)$ , aus (2) – oder rekursiv aus (1) – die radialen Abhängigkeiten zu berechnen.

Im folgenden wird zunächst der Lösungsweg für eine verallgemeinerte Gleichung (1) beschrieben, anschliessend auf die Korrektur eines Ergebnisses für eine verwandte (von SUPLIN behandelte) Gleichung eingegangen und schliesslich eine Erweiterung des Wertebereichs für die Potenz des Kerns der verallgemeinerten Integralgleichung besprochen.

2. Eine Verallgemeinerung von (1) stellt offenbar die Gleichung

$$f(s) = \int_s^a \frac{y(t) dt}{(t^p - s^p)^\alpha}, \quad (3)$$

$0 < \alpha < 1$ ,  $p \neq 0$ ,  $a \geq s$ ,  $a \neq 0$ ,  $f(s)$  stetig differenzierbar, dar. Multiplikation mit  $s^{p-1}/(s^p - z^p)^{1-\alpha}$  und nachfolgende Integration ergeben

$$\int_z^a \frac{s^{p-1} f(s) ds}{(s^p - z^p)^{1-\alpha}} = \int_z^a \frac{s^{p-1} ds}{(s^p - z^p)^{1-\alpha}} \int_s^a \frac{y(t) dt}{(t^p - s^p)^\alpha},$$

woraus nach Vertauschung der Integrationsgrenzen gemäss einem Satz von DIRICHLET [10] sowie mittels

$$\int_z^t \frac{s^{p-1} ds}{(t^p - s^p)^\alpha (s^p - z^p)^{1-\alpha}} = \frac{1}{p} \cdot \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \quad (4)$$

die Gleichung

$$y(z) = -\frac{p \sin \alpha \pi}{\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \int_z^a \frac{s^{p-1} f(s) ds}{(s^p - z^p)^{1-\alpha}} \quad (5)$$

folgt. Die Ausführung der Differentiation nach partieller Integration liefert nun die Lösung

$$y(t) = \frac{p \sin \alpha \pi}{\pi} t^{p-1} \left[ \frac{f(a)}{(a^p - t^p)^{1-\alpha}} - \int_t^a \frac{f'(u) du}{(u^p - t^p)^{1-\alpha}} \right]. \quad (6)$$

Wird hierin  $f(s) \equiv I(x)$ ,  $y(t) \equiv 2r i(r)$ ,  $a \equiv R_0$  sowie  $p = 2$ ,  $\alpha = 1/2$  und  $I(R_0) = 0$  gesetzt entsprechend Gleichung (1), dann wird Gleichung (6) in der Tat identisch mit (2).



## 3. Der verwandte Fall der Abelschen Integralgleichung

$$f(s) = \int_a^s \frac{y(t) dt}{(s^p - t^p)^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1, p \neq 0, s \geq a) \quad (7)$$

ist von SUPLIN [11] behandelt worden. Sein Ergebnis enthält jedoch offenbar einen Druckfehler; es muss richtig lauten

$$y(t) = \frac{p \sin \alpha \pi}{\pi} t^{p-1} \left[ \frac{f(a)}{(t^p - a^p)^{1-\alpha}} + \int_a^t \frac{f'(u) du}{(t^p - u^p)^{1-\alpha}} \right]. \quad (8)$$

Auch in dem bekannten Werk von SCHMEIDLER [12] muss anstelle des dort auf Seite 214 zitierten Ergebnisses (in Beispiel 42) unsere Gleichung (8) stehen.

Zum Beweise werde Gleichung (8) in (7) eingesetzt. Dann wird

$$f(s) = \frac{p \sin \alpha \pi}{\pi} \left[ f(a) \int_a^s \frac{t^{p-1} dt}{(s^p - t^p)^\alpha (t^p - a^p)^{1-\alpha}} + \int_a^s \frac{t^{p-1} dt}{(s^p - t^p)^\alpha} \int_a^t \frac{f'(u) du}{(t^p - u^p)^{1-\alpha}} \right].$$

Nach Vertauschen der Integrationsgrenzen im zweiten und nach Anwendung von Gleichung (4) in beiden Summanden ergibt sich schliesslich die Identität

$$f(s) = f(a) + \int_a^s f'(u) du.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann in diesem Fall  $a = 0$  gesetzt werden.

Mit  $p = 1$  folgt dann aus (7) die bekannte Gleichung

$$f(s) = \int_0^s \frac{y(t) dt}{(s-t)^\alpha} \quad (9)$$

mit der Lösung

$$y(t) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left[ \frac{f(0)}{t^{1-\alpha}} + \int_0^t \frac{f'(u) du}{(t-u)^{1-\alpha}} \right] \quad (10)$$

gemäss Gleichung (8) [13, 10, 14].

Mit  $\alpha = 1/2$ ,  $p = 2$  ergibt sich aus (7) die von v. MISES [15] betrachtete Gleichung

$$f(s) = \int_0^s \frac{y(t) dt}{\sqrt{s^2 - t^2}} \quad (11)$$

mit der Lösung

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \left[ f(0) + t \int_0^t \frac{f'(u) du}{\sqrt{t^2 - u^2}} \right]. \quad (12)$$

Ein weiteres Beispiel von der Form (11), das bei der Untersuchung des Landestosses bei Segelflugzeugen auftritt, ist von SCHMEIDLER [12] zitiert worden.

4. Es lässt sich zeigen, dass die Integralgleichung (3) mittels der Transformation

$$\sigma = a^p - s^p, \quad \tau = a^p - t^p \quad (13)$$

auf Gleichung (9) zurückgeführt werden kann. Geht vermittels (13) die Funktion  $f(s)$  über in  $\varphi(\sigma)$  und  $y(t)$  etwa in  $\eta(\tau)$ , so wird aus (3)

$$\varphi(\sigma) = \frac{1}{p} \int_0^\sigma \frac{\eta(\tau)}{(\sigma - \tau)^\alpha} \cdot \frac{d\tau}{(a^p - \tau)^{(p-1)/p}}$$

und mit

$$\frac{\eta(\tau)}{p (a^p - \tau)^{(p-1)/p}} = \Phi(\tau)$$

daher

$$\varphi(\sigma) = \int_0^\sigma \frac{\Phi(\tau) d\tau}{(\sigma - \tau)^\alpha}.$$

Dies ist eine Gleichung von der Form (9) mit der Lösung (10), welche nun durch Rücksubstitution wiederum Gleichung (6) als Lösung von (3) liefert. Ein solcher Ansatz (13) für den Spezialfall  $p = 2, \alpha = 1/2$  ist bereits von SCHMITZ [2] verwendet worden.

5. Im folgenden werde nun die Integralgleichung

$$f(s) = \int_0^s (s^p - t^p)^\beta y(t) dt \quad (14)$$

behandelt, in der ausser dem bisher Gesagten ein Bereich  $(-1 < \beta < n), p \neq 0$  und ferner eine hinreichend oft stetig differenzierbare Funktion  $f(s)$  zugelassen sein soll.

Gleichung (14) verallgemeinert die bisher betrachteten Fälle im Sinne einer Erweiterung des Wertebereichs für  $\beta$ ; sie erfasst damit zugleich zwei weitere Spezialfälle. Der eine ( $n = 1$ ) ist in der bereits genannten Arbeit von SUPLIN [11] enthalten, während der andere Sonderfall ( $p = 1$ ) mit einem Ergebnis von ROTHE [16] identisch ist, das im Hinblick auf ein Anwendungsbeispiel in der Wasserbautechnik entwickelt wurde.

Es ist bemerkenswert, dass diese Verallgemeinerung, die einen gemeinsamen Ausdruck für alle bisher bekannten Anwendungen der Abelschen Gleichung liefert, ebenfalls mit verhältnismässig einfachen Mitteln zu behandeln ist.

Multiplikation der Gleichung (14) mit  $(z^p - s^p)^\mu s^{p-1}$  und nachfolgende Integration über  $s$  ergibt

$$\int_0^z (z^p - s^p)^\mu s^{p-1} f(s) ds = \int_0^z (z^p - s^p)^\mu s^{p-1} \int_0^s (s^p - t^p)^\beta y(t) dt ds; \quad (15)$$

hierbei sei  $-1 < \mu < n$  und  $\beta + \mu + 1 = n \geq 0$  eine ganze Zahl.

Wird nun das Integral auf der linken Seite von (15) etwa mit  $\psi_0(z)$  bezeichnet

$$\int_0^z (z^p - s^p)^\mu s^{p-1} f(s) ds \equiv \psi_0(z), \quad (16)$$

dann ergibt sich aus (15) durch Vertauschung der Integrationsgrenzen auf der rechten Seite

$$\psi_0(z) = \frac{\Gamma(\mu+1) \Gamma(\beta+1)}{p n!} \int_0^z (z^p - t^p)^n y(t) dt \quad (17)$$

wegen

$$\int_0^z (z^p - s^p)^\mu (s^p - t^p)^\beta s^{p-1} ds = \frac{(z^p - t^p)^{\beta+\mu+1}}{p} B(\beta+1, \mu+1) \quad (18)$$

(wie durch die Substitution  $(z^p - s^p) = u(z^p - t^p)$  leicht zu sehen ist).  $B(\beta+1, \mu+1)$  ist die Eulersche Betafunktion.

Wird ferner

$$\frac{1}{z^{p-1}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \psi_k(z) = \psi_{k+1}(z) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (19)$$

gesetzt, dann ergibt sich als Lösung von (14)

$$y(z) = \frac{1}{p^{n-1} \Gamma(\beta+1) \Gamma(\mu+1)} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \psi_n(z) \quad (20)$$

oder

$$y(t) = \frac{1}{p^{n-1} \Gamma(\beta+1) \Gamma(\mu+1)} \times \frac{\partial}{\partial t} \left\{ t^{1-p} \frac{\partial}{\partial t} \left[ t^{1-p} \dots \frac{\partial}{\partial t} \left( t^{1-p} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t^p - u^p)^\mu u^{p-1} f(u) du \right) \dots \right] \right\} \quad (21)$$

Setzen wir hierin speziell  $p = 1$ , dann folgt

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta+1) \Gamma(\mu+1)} \cdot \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \int_0^t (t-u)^\mu f(u) du, \quad (22)$$

ein Ergebnis von ROTHE [16].

6. Es sollen auch die Differentiationen in (21) noch ausgeführt werden. Wird hierbei jetzt  $f(0) = 0$  gesetzt, dann ist zunächst gemäss (19) und (17)

$$\psi_1(t) = \int_0^t (t^p - s^p)^\mu f'(s) ds \quad (23)$$

und weiterhin

$$\psi_2(t) = \frac{1}{t^p} \left[ (1 + p\mu) \int_0^t (t^p - s^p)^\mu f'(s) ds + \int_0^t (t^p - s^p)^\mu f''(s) s ds \right]. \quad (24)$$

Aus (24) lässt sich sofort ein weiteres Ergebnis von SUPLIN [11] ablesen, das hier dem speziellen Fall  $n = 1$  entspricht. Gemäss (19) für  $k = 1$  ist

$$t^{p-1} \psi_2(t) = \frac{\partial}{\partial t} \psi_1(t).$$

Wird hierin  $\psi_2(t)$  aus (24) eingesetzt, dann ergibt sich aus (20) mit  $\mu = -\beta$  (wegen  $n = 1$ ) die Lösung der Gleichung (14) zu

$$y(t) = \frac{\sin \beta \pi}{\beta \pi} \cdot \frac{1}{t} \left[ (1 - p\beta) \int_0^t \frac{f'(u) du}{(t^p - u^p)^\beta} + \int_0^t \frac{f''(u) u du}{(t^p - u^p)^\beta} \right]; \quad (25)$$

für diese gilt also  $-1 < \beta < 1$  mit zweimal stetig differenzierbarer Funktion  $f(s)$  und keinesfalls allein  $0 < \beta < 1$ , wie von SUPLIN angegeben. Es ist zum Beispiel  $y(t) = f(t)$  sehr leicht zu sehen für  $\beta = 0$ .

Die weitere Differentiation gemäss (21) ergibt nun die Lösung

$$y(t) = \frac{1}{p^{n-1} \Gamma(\beta + 1) \Gamma(\mu + 1)} \cdot \frac{1}{t^{(n-1)p+1}} \left\{ \sum_{v=0}^n a_{vn} \int_0^t (t^p - u^p)^\mu f^{(v+1)}(u) u du \right\} \quad (26)$$

der Gleichung (14) mit den Voraussetzungen der Nr. 5. Die Koeffizienten  $a_{vn}$  genügen dabei den folgenden Bedingungen:

Es ist

$$a_{ik} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ für } k < i, \\ 1 \text{ für } k = i, \\ a_{i-1, k-1} + a_{i, k-1} b_{i, k-1} \\ \quad (k > i, i > 0). \end{array} \right\} \quad (27)$$



Ferner ist

$$a_{0k} = \prod_{\nu=1}^k [1 + \phi(\mu - \nu + 1)], \quad (28)$$

$$b_{ik} = [1 + i + \phi(\mu - k)]; \quad (29)$$

die Laufzahl  $k$  läuft in diesen Formeln von 1 bis  $n$ .

Für  $n = 1$  wird gemäss (28)  $a_{01} = (1 + \phi \mu)$ , gemäss (27) wird  $a_{11} = a_{00} = 1$ . Damit ergibt (26) das bereits vorher abgeleitete Suplinsche Ergebnis (25).

Ist jedoch  $f(0) \neq 0$ , dann tritt auf der rechten Seite von Gleichung (26) noch ein zusätzlicher Summand

$$\frac{\phi}{\Gamma(\beta + 1) \Gamma(\mu + 1)} \mu(\mu - 1) \cdots (\mu - n + 1) i^{\phi(\mu - n + 1) - 1}$$

auf.

Die Untersuchungen haben gezeigt, dass auch die Lösung der hier besprochenen weiteren Verallgemeinerung der Abelschen Integralgleichung, deren Spezialfall eine Anwendung in der Gasentladungsphysik besitzt, mit einfachen Mitteln erreicht werden kann.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. HÖRMANN, Z. Physik 97, 539 (1935).
- [2] G. SCHMITZ, Z. Physik 126, 1 (1949).
- [3] H. MAECKER, Z. Physik 136, 119 (1953).
- [4] P. GERTHSEN, Z. Physik 138, 515 (1954).
- [5] A. BAUER und P. SCHULZ, Z. Physik 146, 339 (1956).
- [6] H. BURCK und KU DSCHI-YÜ, Exper. Technik Physik 7, 39 (1959).
- [7] H. SCHIRMER, Techn.-wiss. Abh. Osram-Ges. 6, 20 (1953).
- [8] H. SCHIRMER, Z. angew. Physik 6, 3 (1954).
- [9] J. FRIEDRICH, Ann. Physik 3 (7), 327 (1959).
- [10] V. VOLTERRA, *Leçon sur les équations intégrales et les équations intégral-différentielles* (Paris 1913).
- [11] M. L. SUPLIN, Zbirnik prac inst. mat. Akad. Nauk. USSR Kiev 3, 113–121 (1940), ukrainisch mit französischer Zusammenfassung s. a. [12].
- [12] W. SCHMEIDLER, *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik*, 2. Aufl. (Leipzig 1955).
- [13] E. GOURSAT, Acta mathematica 27, 129 (1903).
- [14] W. MAGNUS und F. OBERHETTINGER, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*, 2. Aufl. (Berlin 1948).
- [15] R. v. MISES, Z. angew. Math. Mech. 5, 150 (1925).
- [16] R. ROTHE, Math. Z. 33, 375 (1931).

#### Summary

In this paper the solution of a generalized integral equation of Abelian type is communicated with references to an application in gas discharge physics and, on the other hand, to the correction of a result in the corresponding literature. An extension of the validity range of this equation has been considered furthermore.

(Eingegangen: 5. September 1959.)

# A Linear Heat Problem with a Moving Interface

By ROBERT E. GIBSON, London, England<sup>1)</sup>

## 1. Introduction

In this paper we consider a one-dimensional heat conduction problem which possesses some unusual features, and which may be formulated as follows: we seek functions  $u_1(x, t)$  and  $u_2(x, t)$  governed by the equations

$$a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad 0 < x < s(t); \quad (1)$$

$$a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{\partial u_2}{\partial t}, \quad s(t) < x < \infty, \quad (2)$$

and satisfying the initial and boundary conditions

$$u_1(0, t) = g(t), \quad t > 0 \quad (3)$$

$$u_1[s(t), t] = u_2[s(t), t] = h(t), \quad t > 0 \quad (4)$$

$$u_2(x, 0) = f(x), \quad (5)$$

where the functions  $g(t)$ ,  $h(t)$  and  $f(x)$  are given. The motion of the boundary  $x = s(t)$  separating the two regions is also specified, and we suppose furthermore that  $s(0) = 0$ . The problem as stated above for the semi-infinite domain  $x > 0$  consists in reality of two distinct problems, one relating to the interval  $0 < x < s(t)$  (region 1) and the other to the interval  $x > s(t)$  (region 2). Problems of this type involving one or other region arise in a variety of physical situations some of which have been discussed by authors [1 - 4]<sup>2)</sup>. In these papers solutions in closed form are given to examples in which  $g(t)$  and  $h(t)$  are constants,  $f(x)$  is a linear function, and  $s(t)$  is given by

$$s = \alpha t \quad (6)$$

or

$$s = \beta t^{1/2}, \quad (7)$$

but, save in one instance [3], the techniques adopted cannot readily be extended to resolve problems involving boundary conditions more general than these.

<sup>1)</sup> Imperial College, University of London.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 206.

We shall shew that for both regions the determination of a solution can be made to depend upon the possibility of solving a singular Fredholm equation of the first kind. In particular, when the motion of the boundary is restricted to the form (6) or (7) the kernel of the integral equation reduces to a type which enables a formal solution to be obtained in terms of a contour integral. We find that when the boundary moves with uniform speed the conditions for existence of the integral are not unduly restrictive, but when it moves according to (7) conditions must be imposed which are unlikely to be satisfied in many practical problems. For this latter case an alternative form of solution is discussed.

2. The Temperature Distribution in Region 1

2.1 Derivation of the Integral Equation

In region 1 the problem reduces to the determination of the temperature field  $u(x, t)$  satisfying

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < s(t), \tag{8}$$

$$u(0, t) = g(t), \quad t > 0, \tag{9}$$

and

$$u[s(t), t] = h(t), \quad t > 0, \tag{10}$$

where, for convenience, the suffix has been dropped.

It is evident from condition (9) that some simplification results by introducing a doublet of strength  $g$  at the origin, and taking a new dependent variable

$$v = u - \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t g(\tau) G(x, t - \tau) (t - \tau)^{-1} d\tau, \tag{11}$$

where

$$G(x, t) = t^{-1/2} \exp\left(\frac{-x^2}{4a^2t}\right).$$

Since

$$u(0, t) = v(0, t) + g(t)$$

it follows that  $v$  must satisfy

$$a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad 0 < x < s(t), \tag{12}$$

$$v(0, t) = 0, \quad t > 0 \tag{13}$$

and

$$v[s(t), t] = h(t) - \frac{s(t)}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t g(\tau) G[s(t), t - \tau] (t - \tau)^{-1} d\tau. \tag{14}$$

We now seek a solution of the form

$$v(x, t) = \int_0^{\infty} \varphi(\xi) [G(x - \xi, t) - G(x + \xi, t)] d\xi, \quad (15)$$

where  $\varphi$  is an arbitrary function, and this choice ensures that (12) and (13) are met with. It should be noted that as  $t \rightarrow 0$

$$v \rightarrow 2a\sqrt{\pi}\varphi(x),$$

but this violates no imposed condition since region 1 also vanishes at this limit.

Finally, condition (14) at the moving boundary leads to the following integral equation for the unknown function  $\varphi(\xi)$ :

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) \{G[s(t) - \xi, t] - G[s(t) + \xi, t]\} d\xi \\ = h(t) - \frac{s(t)}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t g(\tau) G[s(t), t - \tau] (t - \tau)^{-1} d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

which may be written in the form

$$\int_0^{\infty} \varphi(\xi) \sinh\left[\frac{\xi s(t)}{2a^2 t}\right] \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a^2 t}\right) d\xi = \chi(t), \quad (17)$$

where the right side of (16) is denoted by

$$2t^{-1/2} \exp\left(\frac{-s^2(t)}{4a^2 t}\right) \chi(t).$$

## 2.2 Solution for Region 1 when $s = \alpha t$

This integral equation may be solved when the boundary moves with uniform speed, for then

$$s = \alpha t, \quad \alpha > 0,$$

and the hyperbolic function in the integrand of (17) may be absorbed in the unknown function. By obvious changes of variable (17) can be cast into the form of LAPLACE's integral equation (see [5]) with the solution

$$\varphi(\xi) = 2\xi \operatorname{cosech}\left(\frac{\alpha\xi}{2a^2}\right) \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \chi\left(\frac{1}{4a^2 p}\right) \exp(p\xi^2) dp, \quad (18)$$

where the choice of the real constant  $c$  will be dictated by the form of  $\chi$ . This constitutes a purely formal solution to (17) under the conditions stated, and it



has been tacitly assumed that  $h(t)$  and  $g(t)$  behave in such a way that the contour integral (18) exists; the restrictions on  $g$  and  $h$  which ensure this are not severe, but we shall not pursue this point further here.

As an example of the application of the method consider the simple case where

$$g = g_0 \text{ (const) and } h = h_0 \text{ (const) .}$$

From the definition of  $\chi$  it follows that

$$\chi \left( \frac{1}{4 a^2 p} \right) = \frac{1}{4 a \sqrt{p}} \left[ h_0 - g_0 \operatorname{erfc} \left( \frac{\alpha}{4 a^2 \sqrt{p}} \right) \right] \exp \left( \frac{\alpha^2}{16 a^4 p} \right), \quad (19)$$

where the complementary error function is defined by

$$\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\zeta^2} d\zeta.$$

The integral (18) may be evaluated by standard methods, and we quote here only the final result, namely

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2 a \sqrt{\pi}} \left[ h_0 \coth \left( \frac{\alpha \xi}{2 a^2} \right) - g_0 \operatorname{cosech} \left( \frac{\alpha \xi}{2 a^2} \right) \exp \left( \frac{-\alpha \xi}{2 a^2} \right) \right], \quad (20)$$

whence it follows from (20), (15) and (11) that

$$\left. \begin{aligned} u = g_0 \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2 a \sqrt{t}} \right) + \frac{1}{a \sqrt{\pi t}} \exp \left( \frac{-x^2}{4 a^2 t} \right) \int_0^\infty \left[ h_0 \coth \left( \frac{\alpha \xi}{2 a^2} \right) \right. \\ \left. - g_0 \operatorname{cosech} \left( \frac{\alpha \xi}{2 a^2} \right) \exp \left( \frac{-\alpha \xi}{2 a^2} \right) \right] \sinh \left( \frac{x \xi}{2 a^2 t} \right) \exp \left( \frac{-\xi^2}{4 a^2 t} \right) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

### 2.3 Solution for Region 1 when $s = \beta t^{1/2}$

In the next case we suppose the boundary to move according to the law

$$s = \beta t^{1/2}$$

and in these circumstances equation (17) reduces to a form which can be solved, at least formally, using Mellin transforms [6]. Writing

$$\zeta = \frac{\xi}{2 a \sqrt{t}} \quad \text{and} \quad \tau = 2 a \sqrt{t}$$

we have from (17)

$$\int_0^\infty \varphi(\zeta, \tau) \sinh \left( \frac{\beta}{\alpha} \zeta \right) \exp(-\zeta^2) d\zeta = \psi(\tau), \quad (22)$$

where

$$\psi(\tau) = \tau^{-1} \chi \left( \frac{\tau^2}{4a^2} \right). \quad (23)$$

The Mellin transform of  $\psi$  is denoted by

$$\psi^*(\sigma) = \int_0^\infty \psi(\tau) \tau^{\sigma-1} d\tau$$

with a similar notation for the other variables. Thus multiplying (22) by  $\tau^{\sigma-1}$  and integrating over  $(0, \infty)$  we obtain

$$\psi^*(\sigma) = \varphi^*(\sigma) 2^{(\sigma-3)/2} \Gamma(1-\sigma) \exp\left(\frac{\beta^2}{8a^2}\right) \left[ D_{\sigma-1} \left( \frac{-\beta}{a\sqrt{2}} \right) - D_{\sigma-1} \left( \frac{\beta}{a\sqrt{2}} \right) \right], \quad (24)$$

where  $D$  is WEBER'S parabolic cylinder function (see for example [7]). Solving for  $\varphi^*$  and inverting we find

$$\varphi(\xi) = 2^{3/2} \exp\left(-\frac{\beta^2}{8a^2}\right) \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{2^{-\sigma/2} \psi^*(\sigma) \xi^{-\sigma} d\sigma}{\Gamma(1-\sigma) [D_{\sigma-1}(-\beta/a\sqrt{2}) - D_{\sigma-1}(\beta/a\sqrt{2})]}. \quad (25)$$

If, however, we consider the example of the preceding section where  $g$  and  $h$  are supposed constant we find, from the definition of  $\chi$  and (23), that

$$\psi(\tau) = \frac{1}{4a} \exp\left(\frac{\beta^2}{4a^2}\right) \left[ h_0 - g_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta}{2a}\right) \right] = A \text{ say}, \quad (26)$$

the Mellin transform of which does not exist. This difficulty may be overcome for example by introducing an exponential factor to ensure convergence of the Mellin integral. We take

$$\bar{\psi}(\tau) = \psi(\tau) \exp(-\delta\tau), \quad \delta > 0,$$

of which the Mellin transform is

$$\bar{\psi}^*(\sigma) = A \Gamma(\sigma) \delta^{-\sigma}, \quad \operatorname{Re}(\sigma) > 0.$$

The contour integral may now be evaluated using the calculus of residues, and we find that

$$\varphi(\xi) = A \exp\left(-\frac{\beta^2}{8a^2}\right) \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{(n+3)/2} \delta^n \xi^n}{(n!)^2 [D_{-n-1}(-\beta/a\sqrt{2}) - D_{-n-1}(\beta/a\sqrt{2})]} \quad (27)$$

of which only the first term contributes in the limit. The expression may be simplified by using the known result

$$D_{-n-1}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) \frac{d^n}{dx^n} \left[ \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right],$$

where  $n$  is zero or a positive integer, and the solution is now expressible in the form

$$\varphi(\xi) = \left[ \frac{h_0 - g_0 \operatorname{erfc}(\beta/2 a)}{2 a \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\beta/2 a)} \right]. \quad (28)$$

It follows from (15) and (11) that

$$u = g_0 + (h_0 - g_0) \frac{\operatorname{erf}(x/2 a \sqrt{t})}{\operatorname{erf}(\beta/2 a)}, \quad (29)$$

a result obtained previously by GRINBERG [1]. It may be noted that for this particular example the rather involved procedure outlined above can be avoided for the integral equation (22) may be solved by inspection. Furthermore, if the function  $\psi$  is expressible as a polynomial:

$$\psi(\tau) = \sum_n a_n \tau^{\lambda_n}, \quad \lambda_n > -2,$$

it is seen from (22) that

$$\varphi(\xi) = \sum_n b_n \xi^{\lambda_n},$$

where the coefficients  $b_n$  are determined from

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{2^{(3+\lambda_n)/2} \exp(-\beta^2/8 a^2)}{\Gamma(1 + \lambda_n) [D_{-1-\lambda_n}(-\beta/a \sqrt{2}) - D_{-1-\lambda_n}(\beta/a \sqrt{2})]}.$$

### 3. The Temperature Distribution in Region 2

#### 3.1 Derivation of the Integral Equation

In the second region  $x > s(t)$  we seek a function  $u(x, t)$  governed by

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (30)$$

which satisfies the initial condition

$$u(x, 0) = f(x), \quad x > 0 \quad (31)$$

and the boundary conditions

$$u[s(t), t] = h(t), \quad t > 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\infty, t) = 0, \quad (33)$$

where  $f(x)$  is assumed to be of bounded variation.

If a solution of (30) satisfying (33) is chosen of the form

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} [f(\xi) G(x - \xi, t) + \lambda(\xi) G(x + \xi, t)] d\xi, \quad (34)$$

then this corresponds physically to the temperature at  $(x, t)$  due to an initial temperature distribution  $f(x)$  in  $x > 0$  and  $\lambda(x)$  in  $x < 0$ . Since of these initial conditions we are concerned only to ensure that (31) is met with, we are at liberty to regard  $\lambda$  as an arbitrary distribution which must be so adjusted that the remaining requirement (32) is satisfied. In this way we are led to the following integral equation for  $\lambda(\xi)$ :

$$2a\sqrt{\pi}h(t) = \int_0^{\infty} \{f(\xi) G[s(t) - \xi, t] + \lambda(\xi) G[s(t) + \xi, t]\} d\xi. \quad (35)$$

### 3.2 Solution for Region 2 when $s = \alpha t$

When the boundary maintained at temperature  $h(t)$  moves into the medium at a uniform speed  $\alpha$ , the above equation reduces to

$$2a\sqrt{\pi}t h(t) \exp\left(\frac{\alpha^2 t}{4a^2}\right) = \int_0^{\infty} \left[ f(\xi) \exp\left(\frac{\alpha \xi}{2a^2}\right) + \lambda(\xi) \exp\left(\frac{-\alpha \xi}{2a^2}\right) \right] \exp\left(\frac{-\xi^2}{4a^2 t}\right) d\xi \quad (36)$$

and following again the methods of [5] it can easily be shewn that a formal solution is

$$\lambda(\xi) = \xi \exp\left(\frac{\alpha \xi}{2a^2}\right) \frac{1}{i\sqrt{\pi}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} h\left(\frac{1}{4a^2 p}\right) \exp\left[p\xi^2 + \frac{\alpha^2}{16a^4 p}\right] dp + f(\xi) \exp\left(\frac{\alpha \xi}{a^2}\right). \quad (37)$$

As illustrative of the method we consider the case where the temperature at the moving boundary is invariable, namely when

$$h = h_0 \text{ (const) .}$$

The evaluation of the contour integral presents no unusual features and it is found that

$$\lambda(\xi) = h_0 \left[ 1 + \exp\left(\frac{\alpha \xi}{a^2}\right) \right] - f(\xi) \exp\left(\frac{\alpha \xi}{a^2}\right),$$



which enables the temperature distribution to be expressed in the form

$$u = \frac{h_0}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) + \frac{h_0}{2} \exp \left[ -\frac{\alpha}{a^2} (x - \alpha t) \right] \operatorname{erfc} \left( \frac{x - 2\alpha t}{2a\sqrt{t}} \right) + \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} \exp \left( -\frac{x^2}{4a^2 t} \right) \int_0^\infty f(\xi) \sinh \left[ \frac{\xi(x - \alpha t)}{2a^2 t} \right] \exp \left( \frac{\alpha \xi}{2a^2} - \frac{\xi^2}{4a^2 t} \right) d\xi. \quad (38)$$

An alternative method of approach to these problems of region 2, which has been exploited by BENFIELD [4] and GRINBERG [1] and which is discussed in [3], depends upon the introduction of a system of moving axes with origin embedded in the moving boundary. This is tantamount to taking a new space variable

$$z = x - s(t),$$

in terms of which the governing equation (30) becomes

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

The success of the method depends upon two circumstances: the boundaries are now 'fixed' at  $z = 0, \infty$ , and furthermore, since  $ds/dt$  is constant, the independent variable  $t$  may be eliminated temporarily by means of a Laplace transform. It is clear, however, that no special advantage would have been gained by using this approach to the problems of region 1.

### 3.3 Solution for Region 2 when $s = \beta t^{1/2}$

An argument corresponding closely to that of Section 2.3 can be appealed to for deriving the solution in region 2 appropriate to the case when the boundary moves according to (7). By the same changes of variable as used in that section, the following equation for determining  $\lambda$  may be derived

$$\int_0^\infty \lambda(\tau \zeta) \exp \left( -\frac{\beta}{\alpha} \zeta - \zeta^2 \right) d\zeta = \mu(\tau), \quad (39)$$

where

$$\mu(\tau) = \sqrt{\pi} \exp \left( \frac{\beta^2}{4a^2} \right) h \left( \frac{\tau^2}{4a^2} \right) - \int_0^\infty f(\tau \zeta) \exp \left( \frac{\beta}{a} \zeta - \zeta^2 \right) d\zeta,$$

and using the Mellin transform as before it can be shewn that

$$\lambda(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{2^{(1-\sigma)/2} \mu^*(\sigma) \exp(-\beta^2/8 a^2) \xi^{-\sigma} d\sigma}{\Gamma(1-\sigma) D_{\sigma-1}(\beta/a\sqrt{2})} \quad (40)$$

and the remarks concluding section 2.3 apply *mutatis mutandis* to the above solution.

#### 4. Concluding Remarks

The problems discussed in this paper may be generalized in two obvious ways.

Firstly, the condition  $s(0) = 0$  may not be satisfied, and in this event some initial temperature distribution will be prescribed in region 1 as well as in region 2. In region 2 a change of variable

$$y = x - s(0)$$

reduces the problem to that already considered above. For region 1 it would be natural to attempt to extend the methods used in the paper and choose as unknowns the initial temperature distributions outside this region, that is in  $x < 0$  and  $x > s(0)$ . A similar problem where this procedure proved successful is discussed elsewhere [8].

Secondly, when the boundary moves in a manner other than according to (6) or (7) it seems unlikely that explicit solutions can be obtained by the methods used here since the kernel of the integral equations will no longer be expressible in product or difference form. An exception to this may be noted: if

$$s = \alpha t + \beta \sqrt{t}$$

a solution for region 2 may be found.

#### REFERENCES

- [1] G. A. GRINBERG, Zh. tekhn. Akad. Nauk USSR 27 (3) (1951).
- [2] D. V. REDOZUBOV, Zh. tekhn. Akad. Nauk USSR 27 (9), 2149–57 (1957).
- [3] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed. (Clarendon Press, Oxford 1959), chapter 15.
- [4] A. E. BENFIELD, Quart. appl. Math. 7, 436–9 (1949).
- [5] R. E. GIBSON, Quart. appl. Math. 16, 426–30 (1959).
- [6] E. C. TITCHMARSH, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Clarendon Press, Oxford 1937).
- [7] A. ERDÉLYI (ed.), *Higher Transcendental Functions*, vol. 2 (McGraw-Hill, 1953).
- [8] R. E. GIBSON, *A One-dimensional Consolidation Problem with a Moving Boundary*, forthcoming in Quart. appl. Math.

#### Zusammenfassung

Die Temperaturverteilung in einem Körper, der den Halbraum einnimmt,  $x \geq 0$ , wird unter folgenden Bedingungen bestimmt:

1. Die Temperatur der Oberfläche  $x = 0$  ist eine gegebene Funktion der Zeit  $t$ ,  $g(t)$ .
2. Die Temperatur einer gemäss  $x = s(t)$  fortschreitenden Fläche stellt eine gegebene Funktion der Zeit,  $h(t)$  dar, wobei  $s(0) = 0$  und  $h(0) = g(0)$ .
3. Bei  $t = 0$  ist die Temperaturverteilung des Körpers eine gegebene Funktion von  $x$ ,  $f(x)$ .

Die Lösung des Problems wird auf jene einer linearen Fredholm-Integralgleichung zurückgeführt. Es wird gezeigt, dass diese Integralgleichung eine explizite Lösung besitzt, wenn die Funktion  $s(t)$  proportional zu  $t$  oder  $t^{1/2}$  verläuft.

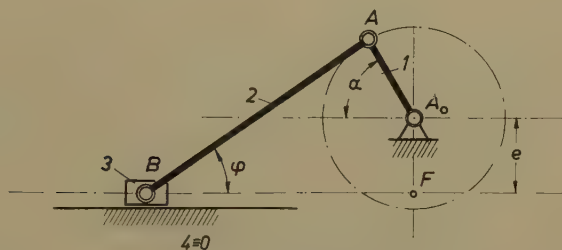
(Received: October 2, 1959.)

# Die Harmonischen der Rotationsenergie bei der Schubkurbel und verwandte Fourier-Reihen

VON WALTHER MEYER ZUR CAPELLEN, Aachen, Deutschland<sup>1)</sup>

## 1. Grundlagen

Während die Koeffizienten der Fourier-Reihe für die Bewegung des Schubgliedes 3 und für die Winkelbewegung der Koppel 2 (Figur 1) nicht in Form geschlossener Ausdrücke anzugeben sind [1, 2, 3, 6, 7, 8]<sup>2)</sup>, können, wie hier gezeigt werden soll, für die Rotationsenergie des Koppelgliedes, welche ja proportional dem Quadrat ihrer Winkelgeschwindigkeit ist, einfache Entwicklungen angegeben werden.



Figur 1  
Geschränkte Schubkurbel.

Aus Figur 1 liest man mit,  $\alpha$  als Kurbelwinkel,  $A_0F = e$ ,  $A_0A = a$ ,  $AB = c$  und  $\lambda = a/c$ ,  $\varepsilon = e/c$ , wobei  $\lambda + \varepsilon \leq 1$  sein muss, für den Koppelwinkel  $\varphi$  die Beziehung  $c \sin \varphi = e + a \sin \alpha$  oder

$$\sin \varphi = \varepsilon + \lambda \sin \alpha \quad (1)$$

ab. Durch Differentiation folgt hieraus für das Verhältnis

$$i = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\varphi/dt}{d\alpha/dt} = \frac{d\varphi}{d\alpha}$$

<sup>1)</sup> Lehrstuhl für Getriebelehre, Rhein.-Westf. Technische Hochschule.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 217.

die Gleichung

$$i = \frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{\lambda \cos \alpha}{\cos \varphi}, \quad (2)$$

worin

$$\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi = 1 - (\varepsilon + \lambda \sin \alpha)^2 \quad (3)$$

ist.

Da die Rotationsenergie des Gliedes 2 von  $1/\cos^2 \varphi$  abhängt, soll zunächst dieser Ausdruck analysiert werden.

## 2. Vergleichsreihe

Hierbei lässt sich die Aufgabe leicht durch Vergleich mit einer von der zentrischen Kurbelschleife her bekannten Entwicklung [4, 5, 7, 8, 10] lösen. Es gilt für  $0 \leq \eta < 1^3$ )

$$i_z = \frac{\eta (\eta + \cos \alpha)}{1 + \eta^2 + 2 \eta \cos \alpha} = \eta \cos \alpha - \eta^2 \cos 2 \alpha + \eta^3 \cos 3 \alpha - \dots +, \quad (4)$$

und danach auch offensichtlich

$$y_0 = \frac{1}{1 + \eta^2 + 2 \eta \cos \alpha} = \frac{1}{1 - \eta^2} (1 - 2 i_z)$$

oder

$$y_0 = \frac{1}{1 + \eta^2 + 2 \eta \cos \alpha} = \frac{1}{1 - \eta^2} + \frac{2}{1 - \eta^2} \sum_{n=1, 2, \dots} (-\eta)^n \cos n \alpha. \quad (5)$$

## 3. Die Reihe für $y = 1/\cos^2 \varphi$

### 3.1 Partialbruchzerlegung

Nach der von der Integralrechnung her bekannten Methode der Partialbruchzerlegung lässt sich hier schreiben

$$y = \frac{1}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{1 - (\varepsilon + \lambda \sin \alpha)^2} = y_1 + y_2, \quad (6)$$

worin

$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon + \lambda \sin \alpha}, \quad y_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon - \lambda \sin \alpha} \quad (7)$$

bedeuten. Jeder der beiden Ausdrücke lässt sich jedoch auf  $y_0$  nach Gleichung (5) zurückführen.

<sup>3)</sup> Es kann auch  $-1 \leq \eta < 0$  sein, aber bei der praktischen Anwendung gelten die oben gegebenen Grenzen.



### 3.2 Entwicklung für $y_1$

Erweitert man  $y_1$  mit dem zunächst unbekannten Faktor  $\mu_1$  und führt  $\bar{\alpha} = \pi/2 - \alpha$  ein, so wird

$$y_1 = \frac{\mu_1/2}{\mu_1(1+\varepsilon) + \mu_1\lambda \sin \alpha} = \frac{\mu_1/2}{1 + \eta_1^2 + 2\eta_1 \cos \bar{\alpha}}, \quad (8)$$

sofern

$$\mu_1(1+\varepsilon) = 1 + \eta_1^2 \quad \text{und} \quad \mu_1\lambda = 2\eta_1 \quad (9)$$

gesetzt wird. Addiert und subtrahiert man beide Gleichungen (9), so folgt durch Division

$$\left(\frac{1+\eta_1}{1-\eta_1}\right)^2 = \frac{1+\varepsilon+\lambda}{1+\varepsilon-\lambda} \quad (10)$$

oder

$$\eta_1 = \frac{\sqrt{1+(\lambda+\varepsilon)} - \sqrt{1-(\lambda-\varepsilon)}}{\sqrt{1+(\lambda+\varepsilon)} + \sqrt{1-(\lambda-\varepsilon)}} = \frac{1+\varepsilon - \sqrt{(1+\varepsilon)^2 - \lambda^2}}{\lambda}. \quad (11)$$

Ferner muss

$$\mu_1 = \frac{2\eta_1}{\lambda} \quad (12)$$

sein.

Da innerhalb der gegebenen Grenzen (vgl. auch Grenzfälle Absätze 3.5c und 4.2c) der Parameter  $\eta_1$  kleiner als 1 bleibt, gilt somit

$$y_1 = \frac{\mu_1}{2} y_0(\eta_1, \bar{\alpha}) = \frac{\eta_1}{\lambda} \left[ \frac{1}{1-\eta_1^2} - \frac{2}{1-\eta_1^2} \sum_{n=1,2,\dots} (-\eta)^n \cos n\bar{\alpha} \right]. \quad (13)$$

### 3.3 Entwicklung für $y_2$

In gleicher Weise liefert die Erweiterung von  $y_2$  mit  $\mu_2/2$  und die Einführung von  $\alpha^* = \pi/2 + \alpha$  jetzt

$$y_2 = \frac{\mu_2}{2} y_0(\eta_2, \alpha^*) = \frac{\mu_2/2}{1 + \eta_2^2 + 2\eta_2 \cos \alpha^*}, \quad (14)$$

und in ähnlicher Weise folgt aus der Bedingung

$$\mu_2(1-\varepsilon) = 1 + \eta_2^2, \quad \mu_2\lambda = 2\eta_2 \quad (15)$$

der Parameter  $\eta_2$  zu

$$\eta_2 = \frac{\sqrt{1+(\lambda-\varepsilon)} - \sqrt{1-(\lambda+\varepsilon)}}{\sqrt{1+(\lambda-\varepsilon)} + \sqrt{1-(\lambda+\varepsilon)}} = \frac{(1-\varepsilon) - \sqrt{(1-\varepsilon)^2 - \lambda^2}}{\lambda} \quad (16)$$

mit

$$\mu_2 = \frac{2\eta_2}{\lambda}. \quad (17)$$

Es gilt somit  $\eta_2 = \eta_1 (-\varepsilon)$ .

Damit hat  $y_2$  die Form

$$y_2 = \frac{\mu_2}{2} y_0 (\eta_2, \alpha^*) = \frac{\eta_2}{\lambda} \left[ \frac{1}{1 - \eta_2^2} - \frac{2}{1 - \eta_2^2} \sum_{n=1,2,\dots} (-\eta)^n \cos n \alpha^* \right]. \quad (18)$$

### 3.4 Entwicklungen für $y$ selbst

Beachtet man nun die Umformungen

$$\left. \begin{array}{l} \cos 2 n \bar{\alpha} \\ \cos 2 n \alpha^* \end{array} \right\} = \cos (n \pi \mp 2 n \alpha) = (-1)^n \cos 2 n \alpha, \quad (19a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos (2 n - 1) \bar{\alpha} \\ \cos (2 n - 1) \alpha^* \end{array} \right\} = \cos \left[ \frac{2 n - 1}{2} \pi \mp (2 n - 1) \alpha \right] = \mp (-1)^n \sin (2 n - 1) \alpha, \quad (19b)$$

so führt die Addition der Gleichungen (13) und (18) auf

$$y = \frac{1}{1 - (\varepsilon + \lambda \sin \alpha)^2} = A_0 + \sum_{n=1,2,\dots} A_{2n} \cos 2 n \alpha + \sum_{n=1,2,\dots} B_{2n-1} \sin (2 n - 1) \alpha. \quad (20)$$

Hierbei wird

$$A_0 = \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{\eta_1}{1 - \eta_1^2} + \frac{\eta_2}{1 - \eta_2^2} \right] = \frac{1}{2} (v_1 + v_2), \quad (21a)$$

$$A_{2n} = (-1)^n (v_1 \eta_1^{2n} + v_2 \eta_2^{2n}), \quad (21b)$$

$$B_{2n-1} = (-1)^n (v_1 \eta_1^{2n-1} - v_2 \eta_2^{2n-1}), \quad (21c)$$

wobei die Abkürzungen

$$v_1 = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{\eta_1}{1 - \eta_1^2} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - \lambda^2}}, \quad v_2 = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{\eta_2}{1 - \eta_2^2} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \varepsilon)^2 - \lambda^2}} \quad (21d)$$

benutzt wurden.

### 3.5 Sonderfälle

a) Für  $\lambda = 0$  wird getrieblich die *schiefe Kreuzschleife* erhalten, es wird  $y = 1/(1 - \varepsilon^2)$ , das heisst, es wird

$$A_0 = \frac{1}{1 - \varepsilon^2}$$

und alle anderen Koeffizienten verschwinden, wie auch für  $\eta_1 = \eta_2 = 0$  aus den Gleichungen (21) folgt.

b) Für  $\varepsilon = 0$  liegt die *zentrische Schubkurbel* vor, und die Gleichungen (11) und (16) liefern

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta = \frac{\sqrt{1+\lambda} - \sqrt{1-\lambda}}{\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{1-\lambda}} = \frac{1}{\lambda} (1 - \sqrt{1-\lambda^2}) \quad (22a)$$

sowie

$$v_1 = v_2 = v = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}. \quad (22b)$$

Somit verschwinden – da ja auch  $y$  jetzt eine gerade Funktion ist – sämtliche  $B$ , und es folgt vereinfacht aus den Gleichungen (21a) und (21b)

$$A_0 = v = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \quad (23a)$$

$$A_{2n} = (-1)^n 2 v \eta^{2n}. \quad (23b)$$

c) Für  $\varepsilon + \lambda = 1$  erhält man den *Grenzfall* des Getriebes mit Verzweigungslage. Dann geht aber  $y$  für  $\alpha = \pi/2$  nach Unendlich, die Reihe konvergiert nicht, wie auch aus Gleichung (21d) zu erkennen ist: Für  $\varepsilon + \lambda = 1$  oder  $\lambda = 1 - \varepsilon$  geht  $v_2$  nach Unendlich. Es muss also hier  $\varepsilon + \lambda < 1$  sein.

### 3.6 Geometrische Deutung der Parameter $\eta_i$

Die grössten Werte des Koppelwinkels, welche für  $\alpha = \pi/2$  und  $\alpha = -\pi/2$  erreicht werden, seien  $\varphi_{max}$  und  $\varphi_{min}$ . Für diese gilt

$$\sin \varphi_{max} = \frac{a+e}{c} = \lambda + \varepsilon, \quad \sin \varphi_{min} = \frac{e-a}{c} = \varepsilon - \lambda,$$

und setzt man dann

$$\varphi_{max} = \frac{\pi}{2} - 2\psi, \quad \varphi_{min} = \frac{\pi}{2} - 2\vartheta,$$

so wird

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (\varepsilon + \lambda)} &= \sqrt{1 + \cos 2\psi} = \sqrt{2} \cos \psi, & \sqrt{1 - (\varepsilon + \lambda)} &= \sqrt{2} \sin \psi, \\ \sqrt{1 + (\lambda - \varepsilon)} &= \sqrt{1 - \cos 2\vartheta} = \sqrt{2} \sin \vartheta, & \sqrt{1 - (\lambda - \varepsilon)} &= \sqrt{2} \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\eta_1 = \frac{\cos \psi - \cos \vartheta}{\cos \psi + \cos \vartheta}, \quad \eta_2 = \frac{\sin \vartheta - \sin \psi}{\sin \vartheta + \sin \psi}, \quad (24)$$

worin

$$\psi = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \varphi_{max}, \quad \vartheta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \varphi_{min}$$

bedeuten<sup>4)</sup>. Beim zentrischen Getriebe ( $\varepsilon = 0$ ) wird

$$\varphi_{\min} = -\varphi_{\max}, \quad \text{also} \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

und

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta = \frac{\cos \varphi - \sin \varphi}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \operatorname{tg} \frac{\varphi_{\max}}{2}. \quad (25)$$

Setzt man formal

$$\frac{1 + \varepsilon}{\lambda} = \cosh \delta, \quad \frac{1 - \varepsilon}{\lambda} = \sinh \sigma, \quad (26a)$$

so wird auch ganz einfach

$$\eta_1 = e^{-\delta}, \quad \eta_2 = e^{-\sigma}, \quad (26b)$$

$$\frac{1}{v_1} = \lambda \sinh \delta, \quad \frac{1}{v_2} = \lambda \sinh \sigma. \quad (26c)$$

Auch lassen sich mit der Substitution  $\sin \bar{\delta} = \lambda/(1 + \varepsilon)$ ,  $\sin \bar{\sigma} = \lambda/(1 - \varepsilon)$  die Parameter auf die Formen

$$\eta_1 = \operatorname{tg} \frac{\bar{\delta}}{2}, \quad \eta_2 = \operatorname{tg} \frac{\bar{\sigma}}{2}, \quad \frac{1}{v_1} = (1 + \varepsilon) \cos \bar{\delta}, \quad \frac{1}{v_2} = (1 - \varepsilon) \cos \bar{\sigma} \quad (26d)$$

bringen.

Hinsichtlich der Darstellung der Parameter vgl. Figuren 2 und 3<sup>5)</sup>.

#### 4. Die Fourier-Reihe für $w = i^2$

##### 4.1 Allgemeine Entwicklung

Die Reihe für

$$w = i^2 = \frac{\lambda^2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \varphi} \quad (27)$$

lässt sich auf die Reihe für  $y$  bzw.  $y_0$  zurückführen. Es wird

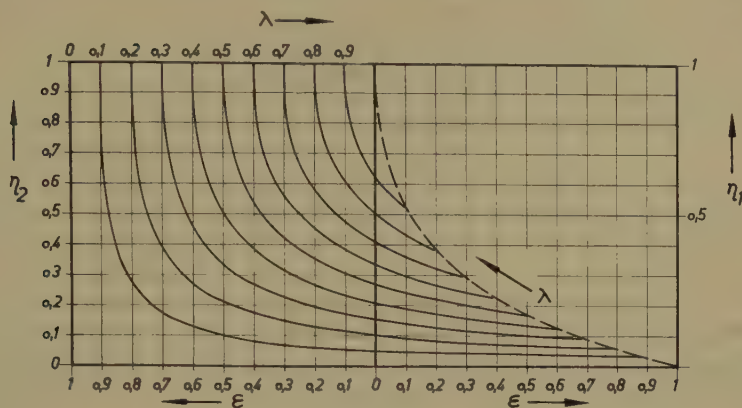
$$w = \frac{\lambda^2}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{\cos^2 \varphi} = \frac{\lambda^2}{2} (y + y \cos 2\alpha) = \frac{\lambda^2}{2} (w_1 + w_2). \quad (28)$$

Für den Anteil  $w_2 = y \cos 2\alpha$  hat man die Reihe für  $y$  gemäss Gleichung (20) mit  $\cos 2\alpha$  unter Beachtung der goniometrischen Formeln

$$\left. \begin{aligned} 2 \cos 2n\alpha \cos 2\alpha &= \cos 2(n+1)\alpha + \cos 2(n-1)\alpha, \\ 2 \sin(2n-1)\alpha \sin 2\alpha &= \sin(2n+1)\alpha + \sin(2n-3)\alpha \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

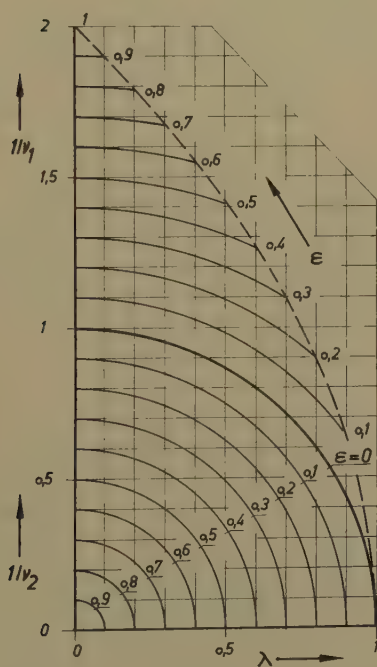
<sup>4)</sup> Diese Umformungen spielen auch bei der Bestimmung des Extremums der Winkelgeschwindigkeit eine Rolle [6].

<sup>5)</sup> Ähnliche Tafeln kommen bei der geschränkten Kurbelschleife vor [9].



Figur 2

Funktionen  $\eta_1 = f(\varepsilon)$  und  $\eta_2 = f(\varepsilon)$  für verschiedene Parameter  $\lambda$ .



Figur 3

Funktionen  $1/\nu_1 = f(\lambda)$  und  $1/\nu_2 = f(\lambda)$  für verschiedene Parameter  $\varepsilon$ .



zu multiplizieren und erhält

$$\left. \begin{aligned} w_2 = \frac{1}{2} A_2 + \frac{1}{2} (2 A_0 + A_4) \cos 2 \alpha + \frac{1}{2} (A_2 + A_6) \cos 4 \alpha \\ + \frac{1}{2} (A_4 + A_8) \cos 6 \alpha + \dots \\ + \frac{1}{2} (-B_1 + B_3) \sin \alpha + \frac{1}{2} (B_1 + B_5) \sin 3 \alpha \\ + \frac{1}{2} (B_3 + B_7) \sin 5 \alpha + \dots \end{aligned} \right\} \quad (30a)$$

Addiert man nun die Reihe für  $w_2$  zu der von  $y$  selbst, so erhält man die Entwicklung

$$\left. \begin{aligned} w = \frac{\lambda^2 \cos^2 \alpha}{1 - (\varepsilon + \lambda \sin \alpha)^2} = A_0^* + \sum_{n=1,2,\dots} A_{2n}^* \cos 2n \alpha \\ + \sum_{n=1,2,\dots} B_{2n-1}^* \sin (2n-1) \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (30b)$$

worin zum Beispiel

$$A_4^* = \frac{\lambda^2}{4} [A_2 + 2 A_4 + A_6]$$

wird, das heisst

$$A_4^* = \frac{\lambda^2}{4} [-(\nu_1 \eta_1^2 + \nu_2 \eta_2^2) + 2(\nu_1 \eta_1^4 + \nu_2 \eta_2^4) - (\nu_1 \eta_1^6 + \nu_2 \eta_2^6)],$$

$$\begin{aligned} A_4^* &= -\frac{\lambda^2}{4} [\nu_1 \eta_1^2 (1 - \eta_1^2)^2 + \nu_2 \eta_2^2 (1 - \eta_2^2)^2] \\ &= -\frac{\lambda}{2} [(1 - \eta_1^2) \eta_1^3 + (1 - \eta_2^2) \eta_2^3] = -\left(\frac{1}{\nu_1} \eta_1^4 + \frac{1}{\nu_2} \eta_2^4\right). \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhält man dann

$$A_0^* = \frac{\lambda}{2} (\eta_1 + \eta_2), \quad (31a)$$

$$A_{2n}^* = (-1)^{n-1} \left( \frac{1}{\nu_1} \eta_1^{2n} + \frac{1}{\nu_2} \eta_2^{2n} \right), \quad (31b)$$

$$B_{2n-1}^* = (-1)^{n-1} \left( \frac{1}{\nu_1} \eta_1^{2n-1} - \frac{1}{\nu_2} \eta_2^{2n-1} \right). \quad (31c)$$

Aus  $\eta_1/\nu_1 = \lambda/2 = \eta_2/\nu_2$  folgt auch

$$A_{2n}^* = (-1)^{n-1} \frac{\lambda}{2} (\eta_1^{2n-1} + \eta_2^{2n-1}), \quad (31d)$$

$$B_{2n}^* = (-1)^{n-1} \frac{\lambda}{2} (\eta_1^{2n-2} - \eta_2^{2n-2}), \quad (31e)$$

insbesondere

$$B_1^* = \left( \frac{\eta_1}{v_1} - \frac{\eta_2}{v_2} \right) = \frac{\lambda}{2} (\eta_2^2 - \eta_1^2) \cdot 6) \quad (31f)$$

#### 4.2 Sonderfälle

a)  $\lambda = 0$  liefert trivial  $w = 0$ .

b)  $\varepsilon = 0$ , das heisst, die zentrische Schubkurbel liefert  $\eta_1 = \eta_2 = \eta$  [vgl. Gleichung (22a)] und führt auf

$$A_0^* = \lambda \eta, \quad A_{2n}^* = \frac{2}{v} (-1)^{n-1} \eta^{2n},$$

alle  $B = 0$ .

c) Der *Grenzfall*  $\varepsilon + \lambda = 1$  für das durchschlagende Getriebe führt jetzt aber zur Konvergenz. Zunächst lässt sich  $w$  mit

$$\sin \varphi = (1 - \lambda) + \lambda \sin \alpha = 1 - \lambda (1 - \sin \alpha) = 1 - \lambda (1 - \cos \bar{\alpha}) = 1 - 2\lambda \sin^2 \frac{\bar{\alpha}}{2}$$

auf die Form

$$w = \frac{\lambda \cos^2(\bar{\alpha}/2)}{1 - \lambda \sin^2(\bar{\alpha}/2)} = \frac{\lambda (1 + \cos \bar{\alpha})}{(2 - \lambda) + \lambda \cos \bar{\alpha}} \quad (32)$$

bringen. Während  $i$  oder  $w = i^2$  gemäss Gleichung (27) einen unbestimmten Ausdruck für  $\alpha \rightarrow \pi/2$  liefert, zeigt jetzt  $w$  in der Form der Gleichung (32) keine Unbestimmtheit mehr; denn  $\alpha = \pi/2$  oder  $\alpha = 0$  ergibt

$$w\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lambda.$$

Man könnte unter Rückgriff auf die Gleichung für  $y_0$  hieraus die Reihe entwickeln, man kann aber auch unmittelbar  $\varepsilon + \lambda = 1$  in die vorstehenden Gleichungen einsetzen.

Man erhält zunächst nach den Gleichungen (11) und (16)

$$\eta_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - \lambda}}{1 + \sqrt{1 - \lambda}} = \eta_0 \quad \text{und} \quad \eta_2 = 1,$$

ferner

$$v_1 = \frac{1}{2\sqrt{1 - \lambda}}, \quad v_2 = \infty,$$

also gemäss Gleichung (31):

$$A_0^* = 1 - \sqrt{1 - \lambda} = 1 - \sqrt{\varepsilon}, \quad (33a)$$

$$A_{2n}^* = (-1)^{n-1} 2\sqrt{1 - \lambda} \eta^{2n}, \quad (33b)$$

$$B_{2n-1}^* = (-1)^{n-2} 2\sqrt{1 - \lambda} \eta^{2n-1}. \quad (33c)$$

6) Die zweite Form ist für die rechnerische Auswertung günstiger.

Die Koeffizienten  $A_{2n}^*$  und  $B_{2n-1}^*$  sind geometrisch abgestuft. Würde man wie in anderen Fällen [6] Kurventafeln für die Koeffizienten aufstellen, so lieferten die Gleichungen (33) die Grenzkurven.

Im übrigen reduzieren sich für  $\lambda = 1$  die Werte auf  $A_0^* = 1$  – alle anderen verschwinden; denn es ist dann nach Gleichung (32)  $w = 1$ .

## 5. Weitere Reihen

Der Vollständigkeit halber seien noch zwei weitere Reihen angegeben.

$$5.1 \quad u = \frac{\lambda \sin \alpha}{\cos^2 \varphi} = \lambda \sin \alpha \quad y$$

Multipliziert man die Reihe für  $y$  gemäss Gleichung (20) gliedweise mit  $\sin \alpha$  unter Beachtung von

$$2 \sin \alpha \cos 2n \alpha = \sin(2n+1)\alpha - \sin(2n-1)\alpha,$$

$$2 \sin \alpha \sin(2n-1)\alpha = \cos(2n-2)\alpha - \cos 2n \alpha,$$

so erhält man in ähnlicher Weise wie vorstehend

$$u = \frac{\lambda \sin \alpha}{1 - (\varepsilon + \lambda \sin \alpha)^2} = a_0 + \sum_{n=1,2,\dots} a_{2n} \cos 2n \alpha + \sum_{n=1,2,\dots} b_{2n} \sin 2n \alpha, \quad (34)$$

worin

$$a_0 = -\left(\frac{\eta_1^2}{1 - \eta_1^2} - \frac{\eta_2^2}{1 - \eta_2^2}\right), \quad (35a)$$

$$a_{2n} = (-1)^{n-1} (\xi_1 \eta_1^{2n} - \xi_2 \eta_2^{2n}), \quad (35b)$$

$$b_{2n-1} = (-1)^{n-1} (\xi_1 \eta_1^{2n-1} + \xi_2 \eta_2^{2n-1}) \quad (35c)$$

mit

$$\xi_i = \frac{1 + \eta_i^2}{1 - \eta_i^2} \quad \text{oder} \quad \xi_1 = \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - \lambda^2}}, \quad \xi_2 = \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{(1 - \varepsilon)^2 - \lambda^2}}. \quad (35d)$$

Für den Grenzfall  $\varepsilon + \lambda = 1$  konvergiert die Reihe nicht, während für  $\varepsilon = 0$  doch  $\eta_1 = \eta_2$  und  $\varphi_1 = \varphi_2 = \xi/\sqrt{1 - \lambda^2}$  wird. Die  $a_{2n}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) verschwinden, und es bleibt

$$b_{2n-1} = (-1)^{n-1} \frac{2}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \eta^{2n-1}. \quad (36)$$

$$5.2 \quad v = \frac{\lambda \cos \alpha}{\cos^2 \varphi} = \lambda \cos \alpha \quad y$$

Dafür folgt entsprechend

$$v = \sum_{n=1,2,\dots} \bar{a}_{2n-1} \cos(2n-1)\alpha + \sum_{n=1,2,\dots} \bar{b}_{2n} \sin 2n \alpha, \quad (37)$$

da ja

$$\left. \begin{aligned} 2 \cos \alpha \cos 2n\alpha &= \cos(2n+1)\alpha + \cos(2n-1)\alpha, \\ 2 \cos \alpha \sin(2n-1)\alpha &= \sin 2n\alpha + \sin(2n-2)\alpha \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

gilt. Hierbei haben die Koeffizienten die einfachen Formen

$$\bar{a}_{2n-1} = (-1)^{n-1} (\eta_1^{2n-1} + \eta_2^{2n-1}), \quad (39a)$$

$$\bar{b}_{2n} = (-1)^n (\eta_1^{2n} - \eta_2^{2n}). \quad (39b)$$

Für den anderen Grenzfall  $\varepsilon + \lambda = 1$  hat man keine Konvergenz, während für  $\varepsilon = 0$  nur die Koeffizienten

$$\bar{a}_{2n-1} = (-1)^{n-2} 2 \eta^{2n-1} \quad (40)$$

nicht verschwinden.

## 6. Bestimmte Integrale

Da für die Fourier-Koeffizienten der Funktion  $f(\alpha)$  doch die Formeln

$$2\pi A_0 = \int_0^{2\pi} f(\alpha) d\alpha, \quad \pi A_n = \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha, \quad \pi B_n = \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha \quad (41)$$

gelten, können die bestimmten Integrale auf den rechten Seiten für die oben behandelten Funktionen  $f(\alpha)$  leicht angegeben werden. So ist zum Beispiel

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{1 - (\varepsilon + \lambda \sin \alpha)^2} = 2\pi A_0 \quad (42)$$

mit  $A_0$  aus Gleichung (21a).

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BIEZENO, C. B., und GRAMMEL, R., *Technische Dynamik*, Bd. I und II, 2. Auflage (Springer Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1953).
- [2] MEWES, E., *Formeln für die Massenkkräfte und kinematischen Zusammenhänge bei geschränkten Schubkurbelgetrieben*, Ing.-Arch. 24, 291-298 (1956).
- [3] MEWES, E., *Einflüsse der Schränkungen von Schubkurbelgetrieben auf die Bewegungsverhältnisse der Gleitstücke*, Z. angew. Math. Mech. 37, 275-277 (1957).
- [4] MEYER ZUR CAPELLEN, W., *Harmonische Analyse bei der Kurbelschleife*, Z. angew. Math. Mech. 36, 151 (1956).
- [5] MEYER ZUR CAPELLEN, W., *Kinematik und Dynamik der Kurbelschleife*, Werkstatt und Betrieb 89, 581-584, 677-683 (1956).
- [6] MEYER ZUR CAPELLEN, W., *Bewegungsverhältnisse an der geschränkten Schubkurbel*, Forschungsberichte des Wirtschafts- und Verkehrsministeriums Nordrhein-Westfalen, Nr. 449 (Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen 1958).

- [7] MEYER ZUR CAPELLEN, W., *Die zweidimensionale Fourieranalyse spezieller Kopfelkurven*, Z. angew. Math. und Mech. 39, 31–40 (1959).
- [8] MEYER ZUR CAPELLEN, W., *Die harmonische Analyse bei Kurbelgetrieben*, I. *Allgemeine Zusammenhänge*, Forschungsberichte des Wirtschafts- und Verkehrsministeriums Nordrhein-Westfalen, Nr. 676 (Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen 1959).
- [9] MEYER ZUR CAPELLEN, W., *Die geschränkte Kurbelschleife*, I. *Bewegungsverhältnisse*, Forschungsberichte des Wirtschafts- und Verkehrsministeriums Nordrhein-Westfalen, Nr. 718 (Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen 1959).
- [10] MEYER ZUR CAPELLEN, W., und RATH, W., *Die geschränkte Kurbelschleife*, II. *Die harmonische Analyse*, Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr. 804 (Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen).
- [11] MEYER ZUR CAPELLEN, W., *Die Fourierreihe für den Schleifenwinkel der zentrischen Kurbelschleife und verwandte Fourierreihen*, Buletinul Institutului Politehnic din Jasi (Rumänien) [N F] 5 (9), H. 1–2 (1959).

### Summary

The rotational energy of a link in a mechanism is proportional to the square of its angular velocity. This 'square', in contrast to the angular velocity itself, can be expanded into a Fourier series, having finite values for its coefficients. The problem is solved by splitting it into partial fractions, leading to the harmonic analysis of the slotted lever mechanism. Further related series are given at the end.

(Eingegangen: 21. August 1959.)

## Cylindrically Orthotropic Circular Plates with Large Deflections<sup>1)</sup>

By JERZY NOWINSKI, Madison, Wisc., U.S.A.<sup>2)</sup>

While the problem of large deflections of elastic isotropic plates has been considered in great detail, so far only three papers on large deflections of anisotropic plates have been published [1, 2, 3,]<sup>3)</sup>. It seems, therefore, reasonable to reconsider this interesting problem using simultaneously, for the sake of comparison, two efficient and straightforward methods such as the perturbation method of POINCARÉ and a modification of the Galerkin method based on the energy concept.

The first of these procedures was applied with success in the last decade to circular and annular isotropic plates by Chinese elasticians<sup>4)</sup> and recently by NASH and COOLEY [5] to elliptic isotropic plates with large deflections.

<sup>1)</sup> This work has been sponsored by the United States Army under contract No. DA-11-002-ORD-2059.

<sup>2)</sup> Army Mathematics Research Center, University of Wisconsin.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 227.

<sup>4)</sup> Cf. WEI-ZANG CHIEN [4]. For an extensive biography see the same author's [5].



The modified method of GALERKIN has been extensively utilized by VOLMIR [7].

1. Consider a thin initially flat cylindrically orthotropic circular plate having the thickness  $h$  and the radius  $a$ . Let the middle plane of the plate coincide with the  $r\varphi$ -plane of a cylindrical coordinate system  $r, \varphi, z$  and the axis of elastic symmetry with the  $z$ -axis of the system. Assume that the plate is acted upon by a central concentrated force  $P$  and a uniformly distributed load  $q$ .

With reference to this system we have throughout the plate, in the absence of body force, the equations of equilibrium

$$(r N_r)' - N_\phi = 0, \quad (1)$$

$$M_\phi - (r M_r)' = r N_r w' + \frac{q}{2} r^2 + \frac{P}{2\pi}, \quad (2)$$

and the equation of compatibility of deformations

$$[r (r N_r)']' - k^2 N_r = -\frac{E_\phi h}{2} (w')^2. \quad (3)$$

Here  $w$  denotes the deflection of the plate,  $N_r$  and  $N_\phi$  the radial and tangential membrane forces and  $M_r$  and  $M_\phi$  the radial and tangential bending moments.  $k^2 = E_\phi/E_r = \nu_\phi/\nu_r$ , while  $E_r$ ,  $E_\phi$  and  $\nu_r$ ,  $\nu_\phi$  designate YOUNG'S moduli and POISSON'S ratios associated with the radial and the circumferential directions, respectively. As usual a prime indicates a differentiation with respect to a single independent variable (in the case considered, with respect to  $r$ ).

For future references, we first note the known relations

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D_r \left( w'' + \frac{\nu_\phi}{r} w' \right), & M_\phi &= -D_\phi \left( \nu_r w'' + \frac{1}{r} w' \right), \\ u &= \frac{r}{h E_\phi} (N_\phi - \nu_\phi N_r), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

where  $D_r$  and  $D_\phi$  denote the flexural rigidities of the plate and  $u$  the radial component of the displacement vector.

To the governing field equations (1), (2), (3) we must adjoin the boundary conditions which in a general case of elastically built-in edge and elastic resistance of the support appear as

$$w = 0, \quad (r N_r)' + \left( \frac{\kappa_1^*}{r} - \nu_\phi \right) N_r = 0, \quad w'' + \left( \frac{\nu_\phi}{r} - \kappa_2^* \right) w' = 0, \quad \text{at } r = a. \quad (5)$$

Here  $\kappa_1^* = h E_\phi / \kappa_1$  and  $\kappa_2^* = \kappa_2 / D_r$ , while  $\kappa_1$  and  $\kappa_2$  designate the elastic constants for the support with respect to a radial displacement and a flexural rotation.

To economize on space, in what follows we shall confine ourselves, with no loss in generality, to a particular case of uniform load (i.e.,  $P = 0$ ) and rigid clamping ( $\kappa_1 = \infty$ ) with edge fastened against radial slipping ( $\kappa_2 = \infty$ ).

Assume that on account of the deformation of the plate its middle plane is deformed into a smooth surface (i.e., with continuously turning tangent plane). We assume, in addition, that the deflection as well as its first derivative are bounded functions throughout the region of the plate<sup>5</sup>). However, we do not postulate the boundedness of the second derivative and we shall discover in the following discussion that for  $k < 1$ , i.e., for  $E_\phi < E_r$  the bending moments increase indefinitely with decreasing distance from the center of the plate. It follows that, in the case considered, the center of the plate becomes a singular point. Such singularities brought about by the physical nature (anisotropy) of the medium are often encountered in the theory of anisotropic bodies<sup>6</sup>).

At this point we find it expedient to transform the governing field equations to a dimensionless form by adopting the notation

$$\alpha = \frac{r}{a}, \quad \zeta = \frac{w}{h}, \quad \zeta_0 = \frac{w(0)}{h}, \quad n_r = \frac{a^2}{D_r} N_r, \quad n_\phi = \frac{a^2}{D_r} N_\phi, \quad \omega = \frac{q a^4}{2 h D_r}. \quad (6)$$

2. Let us first tackle the problem under discussion by using the method of successive approximations based upon the smallness of a parameter. We choose for the parameter the ratio of the center deflection to the thickness,  $\zeta_0$ . Clearly,  $\zeta_0 = \zeta_{max}$  in the case considered. By virtue of (4) and (6) the equations (1), (2), (3) reduce to

$$n_\phi = n_r + \alpha n_r', \quad (7)$$

$$[x(x n_r)']' - k^2 n_r + \lambda^2 (\zeta')^2 = 0, \quad (8)$$

$$x(x \zeta'')' - k^2 \zeta' = x^3 \omega + x^2 n_r \zeta'. \quad (9)$$

From now on the prime denotes, unless the contrary is stated, a differentiation with respect to the variable  $x$ . Moreover,  $\lambda^2 = 6(k^2 - \nu_\phi^2)$ . Let us expand the quantities  $\omega, \zeta, n_r, n_\phi$  in ascending powers of the parameter  $\zeta_0$ . We begin with the second powers in  $\zeta_0$  in the expansions for  $n_r$  and  $n_\phi$  in order to obtain the classical problem of linear bending of the plate for decreasing value of the

<sup>5</sup>) Clearly,  $w' = 0$  at  $r = 0$  because of the axial symmetry of the system.

<sup>6</sup>) To illustrate this observation, we refer, e.g., to the book by LEKHNITSKY [8].

parameter. Hence we write

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \alpha_1 \zeta_0 + \alpha_3 \zeta_0^3 + \dots, & n_r &= g_2(x) \zeta_0^2 + g_4(x) \zeta_0^4 + \dots, \\ \zeta &= z_1(x) \zeta_0 + z_3(x) \zeta_0^3 + \dots, & n_\phi &= h_2(x) \zeta_0^2 + h_4(x) \zeta_0^4 + \dots. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Substitution of (10) into (8) and (9) and into the obvious boundary conditions

$$w = w' = u = 0 \quad \text{at} \quad r = a, \quad (11)$$

yields a sequence of linear boundary value problems associated with terms of successive order in  $\zeta_0$ . We shall designate these problems as 1st, 2nd, ... boundary value problems depending whether they relate to terms of 1st, 2nd, ... order in  $\zeta_0$ .

For the 1st boundary value problem we thus find

$$z_1^{IV} + \frac{2}{x} z_1''' - \frac{k^2}{x^2} \left( z_1'' + \frac{z_1'}{x} \right) = 2 \alpha_1, \quad (12.1)$$

$$z_1(0) = 1, \quad z_1'(0) = 0, \quad z_1(1) = z_1'(1) = 0. \quad (12.2)$$

The solution of this system becomes

$$z_1 = \frac{1}{3-k} [(3-k) - 4x^{k+1} + (k+1)x^4] \quad (13)$$

and corresponds to the well-known solution of a respective linear problem for a clamped cylindrically orthotropic plate, cf. [8].

Furthermore, we reach

$$\alpha_1 = 4(k+1)(k+3). \quad (13.1)$$

By a similar argument we can state the 2nd boundary value problem

$$[x(x g_2)']' - k^2 g_2 + \lambda^2 (z_1')^2 = 0, \quad (14.1)$$

$$(1 - \nu_\phi) g_2(1) + g_2'(1) = 0. \quad (14.2)$$

Here the boundary condition (14.2) follows from the last condition (11) by virtue of the last equation (4) and the relation

$$h_2(x) = g_2(x) + x g_2'(x), \quad (15)$$

which is derived from (7).

A simple calculation yields the solution of the foregoing system

$$g_2(x) = \lambda_1 \left[ -B^* x^{k-1} + \frac{x^6}{49-k^2} - \frac{x^{k+3}}{4(k+2)} + \frac{x^{2k}}{(k+1)(3k+1)} \right], \quad (16)$$

in which the notation  $\lambda_1 = -[4(1+k)\lambda/(3-k)]^2$  and

$$B^* = \frac{1}{k - \nu_\phi} \left[ \frac{7 - \nu_\phi}{49 - k^2} - \frac{k + 4 - \nu_\phi}{4(k+2)} + \frac{2k + 1 - \nu_\phi}{(k+1)(3k+1)} \right] \quad (17)$$

has been adopted.

We now proceed to the next approximation associated with the third boundary value problem

$$x(x z_3'')' - k^2 z_3' = x^2 (x \alpha_3 + g_2 z_1'), \quad (18.1)$$

$$z_3(0) = 0, \quad z_3(1) = z_3'(1) = 0. \quad (18.2)$$

The solution of this problem becomes

$$z_3(x) = \frac{384(k+1)^3(k^2 - \nu_\phi^2)}{(k-3)^4} \left\{ x^{k+1} A - (k-3) x^4 \left[ \left( x^{k+1} + \frac{4}{k-3} \right) B + \left( x^{2k-2} + \frac{k+1}{k+3} \right) C + \left( x^8 - \frac{k-11}{k-3} \right) D + \left( x^{k+5} + \frac{8}{k-3} \right) E + \left( x^{2k+2} + \frac{k+5}{k-3} \right) F + \left( x^{3k-1} + \frac{2(k+1)}{k-3} \right) G \right] \right\} \quad (19)$$

where

$$\left. \begin{aligned} A &= (k+1) B + 2(k-1) C + 8 D + (k+5) E + 2(k+1) F + (3k-1) G, \\ B &= \frac{B^*}{8(k+2)(k+5)}, \quad C = -\frac{B^*}{2(k+1)(3k^2+4k+1)}, \\ D &= -\frac{1}{12(k^2-49)(k^2-121)}, \quad E = \frac{k^2-4k-57}{64(k+2)(k+4)(k+9)(k^2-49)}, \\ F &= -\frac{3k^2+8k+9}{8(k+1)(k+2)(k+3)(3k+1)(3k^2+20k+25)}, \\ G &= \frac{1}{12(k+1)^2(3k+1)(2k^2+3k+1)}. \end{aligned} \right\}$$

Furthermore, we reach

$$\alpha_3 = 4(9 - k^2) A^* \quad (20)$$

with

$$A^* = \frac{384(k+1)^3(\nu_\phi^2 - k^2)}{(k-3)^4} \times [4B + (k+1)C - (k-11)D + 8E + (k+5)F + 2(k+1)G]. \quad (20.1)$$

We confine ourselves to the approximation reached up to the present stage, which by virtue of (10) reduces to the cubic relation between the load

and the relative center deflection

$$\frac{q a^4}{D_r h} = 2(\alpha_1 \zeta_0 + \alpha_3 \zeta_0^3). \quad (21)$$

Here  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2$ , are determined by equations (13.1) and (20). Relative to the convergence of the procedure utilized in the foregoing discussion this problem has not yet been fully clarified from a systematic point of view, cf. [9]. On the other hand, it seems too much to require the convergence in the classical sense of the formal expansions supplied by the method of small parameter. In fact, in practical applications only the first few terms of these expansions are utilized and they may ultimately be even divergent without being inefficient, cf. [10]. Thus we are led to regard the expansions concerned not as the power series but as series asymptotic in nature and this dispenses with an investigation of the convergence of the procedure.

We remark that in the perturbation method the equations for the stresses may be inferred directly from the basic equations [cf. the last two equations (10)] without any recourse to the operation of differentiation. This fact greatly increases the accuracy of the results obtained by this method as compared with some other methods in which a differentiation of approximate expressions of the components of the displacement may occasionally lead to inadequate results.

It may be now of interest to deduce a conclusion which will support our observation anticipated at the end of the first section relative to the singular properties of the center of the plate. To this purpose assume that  $k < 1$ . Then, in view of the appearance of terms of the  $(k+1)$  order in  $x$  in (13), (19) and (24) the second derivative of the deflection with respect to  $x$  increases infinitely with  $x$  tending to zero. It follows that for  $k < 1$  the bending moments at the center of the plate increase infinitely, cf. the first two equations (4). Moreover, the presence of terms of the  $(k-1)$  order in  $x$  in equations (15) and (16) and of the  $(k+1)$  order in  $x$  in equation (26) makes it evident that at the point  $x = 0$  also the membrane stresses increase infinitely.

On the other hand, for  $k > 1$ , it may be concluded by a similar argument that at the center of the plate both the components of the bending moment and the membrane stress vanish. This completes our observation concerning the existence of a point singularity at  $x = 0$ .

3. We turn now to attack the problem under consideration by means of a modification of GALERKIN'S method.

To this purpose, it is convenient to recall the equation of virtual work for a plate with large deflections,

$$2\pi \int_0^a (N_r \delta \varepsilon_r + N_\phi \delta \varepsilon_\phi + M_r \delta \kappa_r + M_\phi \delta \kappa_\phi - q \delta w) r dr = 0, \quad (22)$$



in which

$$\varepsilon_r = u'(r) + \frac{1}{2} [w'(r)]^2, \quad \varepsilon_\phi = \frac{u(r)}{r}, \quad \kappa_r = -w''(r), \quad \kappa_\phi = -\frac{w'(r)}{r}, \quad (22.1)$$

designate, respectively, the unit elongations and the curvatures associated with the radial and circumferential direction. Clearly, in equations (22.1) as well as in the succeeding equations (23) the primes denote the differentiation with respect to the variable  $r$ .

Let us now represent the membrane forces in terms of a stress function  $F = F(r)$ ,

$$N_r = \frac{h}{r} F'(r), \quad N_\phi = h F''(r). \quad (23)$$

This representation permits us to satisfy identically the equation of internal equilibrium (1). We change now back to dimensionless variables and represent the large deflections of the plate in the form established in the linear theory of cylindrically orthotropic uniformly loaded and rigidly fixed circular plates

$$\zeta = [(3 - k) - 4 x^{k+1} + (k + 1) x^4] \zeta_0. \quad (24)$$

By virtue of the foregoing three equations the compatibility equation (3) leads to the differential equation for the stress function

$$x^2 F''' + x F'' - k^2 F' = -8 (k + 1)^2 E_\phi h^2 x (x^3 - x^k) \zeta_0, \quad (25)$$

from which, by neglecting an unimportant constant, one readily obtains

$$F = (x^{k+1} C^* + x^8 A_0 + x^{k+5} B_0 + x^{2k+2} C_0) E_\phi h^2 \zeta_0^2, \quad (26)$$

with

$$A_0 = \frac{(k + 1)^2}{k^2 - 49}, \quad B_0 = \frac{2 (k + 1)^2}{(k + 2) (k + 5)}, \quad C_0 = -\frac{4 (k + 1)}{3 k^2 + 4 k + 1}, \quad (26.1)$$

and

$$C^* = \frac{1}{(k + 1) (k - \nu_\phi)} \times [(8 \nu_\phi - 56) A_0 + (k + 5) (\nu_\phi - k - 5) B_0 + 2 (k + 1) (\nu_\phi - 2 k - 1) C_0], \quad (26.2)$$

the last equation being deduced from the last boundary condition (11).

We now return to the basic equation (22). In view of (4) and (22.1) this equation admits the representation

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 \left[ D_r \left( x \zeta''' + \zeta'' - \frac{k^2}{x} \zeta' \right) - h F' \zeta' - \frac{q a^4}{2 h} \right] (\delta \zeta)' dx \\ + \frac{a^3}{h^2} \int_0^1 [(x N_r)' - N_\phi] \delta u dx = 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

We identify the second integrand in brackets in the equation above as the equation of equilibrium (1) satisfied identically throughout the region of the plate in view of equations (23). We shall annihilate the remaining function and, simultaneously, derive an approximate value of the center deflection by substitution of (24) into (27). This process yields finally the important relation

$$\frac{q a^4}{D_r h} = 2 (\alpha_1^* \zeta_0 + \alpha_3^* \zeta_0^3), \quad (28)$$

with

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^* &= 4 (k+1) (9-k^2), \\ \alpha_3^* &= 288 (k+1) (k+3) (v_\phi^2 - k^2) \left[ \frac{k+1}{(k+2)(k+7)(3k+1)} C^* \right. \\ &\quad + \frac{4}{7(k+4)(k+11)} A_0 + \frac{k+5}{(k+4)(k+11)(3k+5)} B_0 \\ &\quad \left. + \frac{k+1}{(k+4)(2k+1)(3k+5)} C_0 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (28.1)$$

Apparently, the foregoing equation (28) corresponds to the equation (21) derived by the perturbation method and it may be established by inspection that  $\alpha_1 = \alpha_1^*$  in view of (13.1) and the first equation (28.1).

4. The developments of the preceding sections permit us to solve an illustrative example assuming, for definiteness, that  $k = 2$  and  $v_\phi = 1/4$ . By utilizing the relations (21) and (28) in combination with (13.1), (20) and (28.1), respectively, one reaches the following numerical relations between the dimensionless pressure and center deflection:

$$\text{perturbation method, } \frac{q a^4}{D_r h} = 120 \zeta_0 + 48.61 \zeta_0^3, \quad (29.1)$$

$$\text{variational method, } \frac{q a^4}{D_r h} = 120 \zeta_0 + 45.11 \zeta_0^3. \quad (29.2)$$

The results are shown graphically in Figure 1 and exhibit good agreement. The difference, e.g., for  $q^* = q_0 a^4/D_r h = 350$  is less than 2%.

The stresses in the plate are readily obtained by both methods once the deflection is known as well as the functions  $g_2$ ,  $h_2$  and  $F$ . The peak stresses occur on the circumference of the plate and the corresponding bending moments and membrane stresses in dimensionless form are shown in Figure 2 *versus*  $q^*$ . With reference to this figure, we note that the membrane stresses indicated by the Galerkin method are in perfect agreement with the first approximation given by the perturbation method. A similar conclusion may be drawn with regard to the bending stresses. However, the second approximation of these stresses given by the perturbation method considerably changes the preliminary

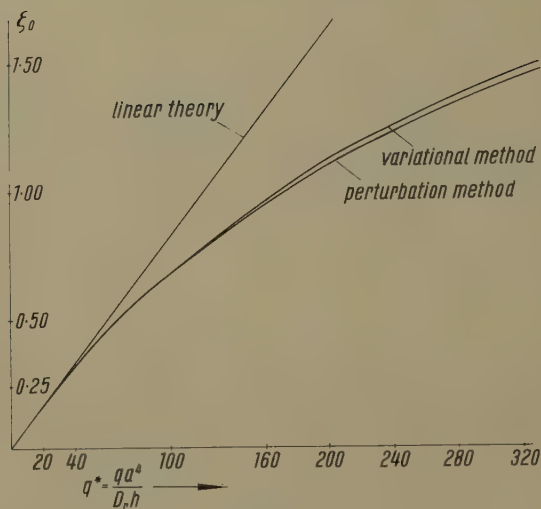


Figure 1  
Deflection *versus* relative load  $q^*$ .  
 $k = 2$ ;  $\nu_\phi = 1/4$ .

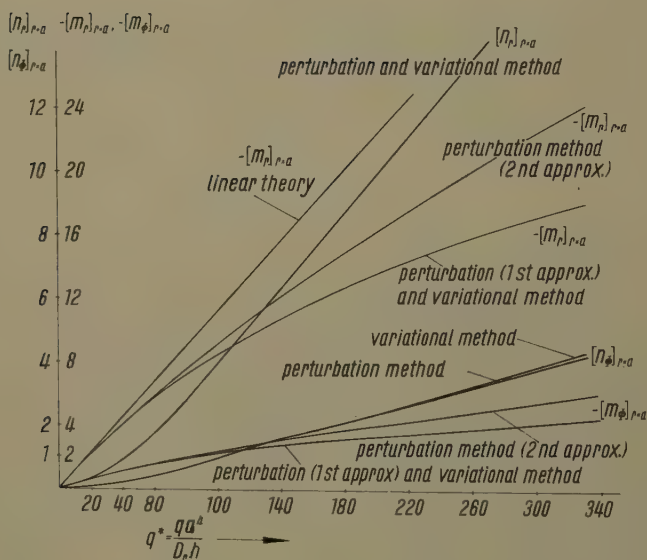


Figure 2  
Moments and membrane stresses *versus*  $q^*$ .

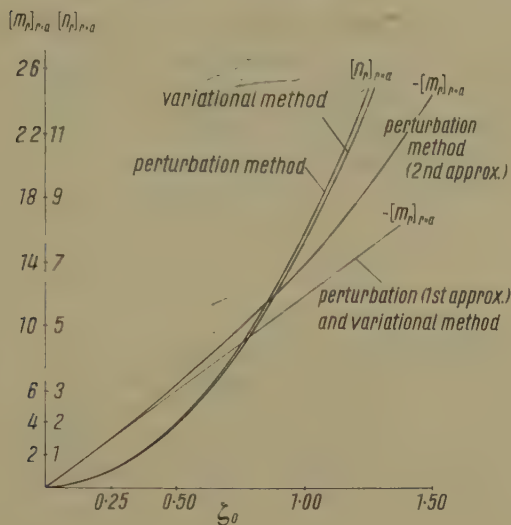


Figure 3  
Radial moment and membrane stress versus relative deflection  $\zeta_0$ .

results. For the sake of completeness, we also show the variation of the radial membrane stress and the radial bending moment with regard to the center deflection in Figure 3.

### REFERENCES

- [1] J. NOWINSKI, *Application of Some Familiar Approximate Methods to Problems Concerning Orthotropic Plates with Large Deflections* (in Polish), *Rozpr. Inz.* 9, 331-354 (1957).
- [2] T. IWINSKI and J. NOWINSKI, *The Problem of Large Deflections of Orthotropic Plates*, *Bull. Acad. Polon. Sci. [cl. 4]* 6, 335-339 (1957).
- [3] W. G. SOPER, *Large Deflections of Stiffened Plates*, *J. appl. Mech.*, 25, 444-448 (1958). Cf. also *Appl. Mech. Rev.*, 12 (1959), rev. 4391.
- [4] WEI-ZANG CHIEN, *Large Deflection of a Circular Clamped Plate Under Uniform Pressure*, *Chin. J. Phys.* 7, 102-113 (1947).
- [5] WEI-ZANG CHIEN, *Problem of Large Deflection of Circular Plate*, *Arch. Mech. Stos.* 8, 1-12 (1957).
- [6] W. A. NASH and I. D. COOLEY, *Large Deflections of a Clamped Elliptical Plate Subjected to Uniform Pressure*, *J. appl. Mech.* 26, 291-293 (1959).
- [7] A. S. VOLMIR, *Flexible Plates and Shells* (in Russian) (GITTL, Moscow 1956).
- [8] S. G. LEKHNITSKY, *Anisotropic Plates* (in Russian) (GITTL, Moscow 1957).
- [9] T. KATO, *On the Convergence of the Perturbation Method*, *Progr. Theor. Phys.* 4, 514-523 (1949).
- [10] T. KATO, *On the Convergence of the Perturbation Method*, *Progr. Theor. Phys.* 5, 95-101 (1950).

*Zusammenfassung*

Es werden die Verschiebungs- und Spannungszustände in einer Kreisplatte mit grossen Durchbiegungen und zylindrischer Orthotropie mit Hilfe zweier Methoden untersucht, nämlich der Methode des kleinen Parameters von POINCARÉ und einer modifizierten Methode von GALERKIN.

Ein numerisches Beispiel für gleichmässige Belastung der Platte, die Poissonsche Zahl  $\nu_\phi = 1/4$  und die Beziehung  $\nu_\phi : \nu_r = 4$  wird gegeben.

(Received: December 19, 1959.)

## Optimal Coordinates for a Simple Shear Flow over a Flat Plate<sup>1)</sup>

By KUO-TAI YEN, Troy, New York, U.S.A.<sup>2)</sup>

### Symbols

- $X, Y$  = Cartesian coordinates  
 $x$  =  $(U_0 X/\nu)$ ,  $y = (U_0 Y/\nu)$   
 $U, V$  = velocity components in  $X$  and  $Y$  directions, respectively  
 $u$  =  $(U/U_0)^*$ ,  $v = (V/U_0)$   
 $U_0$  = a constant velocity  
 $\Psi$  = stream function ( $\Psi = \nu \psi$ )  
 $\xi, \eta$  = parabolic coordinates  
 $2\omega$  = vorticity  
 $2\omega_0$  = free stream vorticity  
 $\nu$  = kinematic viscosity ( $\mu = \rho \nu$ ).

### Introduction

In Reference [1]<sup>3)</sup>, KAPLUN introduced the concept of optimal coordinates for the boundary layer problems. The purpose was to obtain the boundary layer solutions in these coordinates 'valid in the whole flow field'. Consequently, a smooth transition from the boundary layer flow to the external flow can be achieved.

In this paper, it is proposed to show that for a simple viscous shear of an incompressible fluid over a semi-infinite plate, parabolic coordinates can be used as the optimal coordinates.

<sup>1)</sup> This research was supported in whole by the United States Air Force through the Air Force Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command, under Contract No. AF 49(638)-23. Reproduction in whole or in part is permitted for any purpose of the United States Government.

<sup>2)</sup> Rensselaer Polytechnic Institute.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 236.



The approach used in this paper is somewhat different from that of [1]. First, it will be decided as to what are the necessary 'conditions' constituting a smooth transition from the viscous flow to the external free stream. A coordinate system will be called 'optimal' if a solution of the problem can be found to satisfy the necessary conditions for the smooth transition as boundary conditions. It is implied that this solution of the Navier-Stokes equations, which are not invariant with respect to a (conformal) transformation of coordinates, will not necessarily be exact, and different solutions may be obtained when the method of the approximation used in obtaining the solution is applied to the Navier-Stokes equations in different coordinate systems.

For example, for the boundary layer flow of a uniform stream over a flat plate the solution in parabolic coordinates obtained by CARRIER and LIN [2] can be shown to satisfy the condition that the transverse velocity component vanishes at infinity and may be called 'optimal'. For a more detailed discussion of this problem reference may be made to [3].

This consideration can be extended to a shear viscous flow over a flat plate. When the shear flow is of the boundary layer type, the displacement effect of the boundary layer may be important because it appears to influence the boundary conditions at the edge of the boundary layer. The question arises as to what are the proper boundary conditions to use. Thus, a study of the optimal coordinates appears to be desirable.

### Coordinate Transformation and Basic Equations

Let  $X$  and  $Y$  be the Cartesian coordinates with the leading edge of the flat plate as the origin and the plane of the flat plate as the  $X$ -axis. The plate is supposed to be situated in a simple shear flow with constant vorticity. For the present problem, it is convenient to reduce the physical quantities to non-dimensional form in the following manner. Let

$$x = \frac{U_0 X}{\nu}, \quad y = -\frac{U_0 Y}{\nu}, \quad (1)$$

and

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\nu} \Psi(x, y), \quad (2)$$

where  $\Psi$  is a stream function defined such that

$$U = \Psi_Y, \quad V = -\Psi_X. \quad (3)$$

The non-dimensional velocity components are

$$u = \frac{U}{U_0} = \psi_y, \quad v = \frac{V}{U_0} = -\psi_x. \quad (4)$$

The Navier-Stokes equations can be expressed by

$$\psi_y \nabla^2 \psi_x - \psi_x \nabla^2 \psi_y = \nabla^4 \psi. \quad (5)$$

Away from the plate, the free stream conditions are

$$u = 1 + 2\omega_0 y, \quad (6)$$

$$v = 0, \quad (7)$$

$$\omega = \omega_0, \quad (8)$$

where  $\omega_0$  is a non-dimensional vorticity number. The conditions for smooth transition of the flow may be taken as (6), (7) and (8). However, it will be seen later that the condition (7) has to be relaxed. The boundary conditions at the plate are

$$u = v = 0, \quad y = 0. \quad (9)$$

Let the coordinate transformation be given by

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta). \quad (10)$$

The velocity components  $u$  and  $v$  in the Cartesian coordinates can be expressed as [4]:

$$u = \frac{1}{J} (-x_\eta \psi_\xi + x_\xi \psi_\eta), \quad (11)$$

$$v = \frac{1}{J} (-y_\eta \psi_\xi + y_\xi \psi_\eta), \quad (12)$$

where  $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$ . The differential equation for the stream function  $\psi$  in the new variables  $\xi$  and  $\eta$  can be obtained from equation (5).

Parabolic coordinates are defined by

$$x = \xi^2 - \eta^2, \quad y = 2\xi\eta. \quad (13)$$

Equation (5) becomes

$$\psi_\eta \omega_\xi - \psi_\xi \omega_\eta = \omega_{\xi\xi} + \omega_{\eta\eta}, \quad (14)$$

where  $\omega$  is

$$\omega = -\frac{1}{8(\xi^2 + \eta^2)} (\psi_{\xi\xi} + \psi_{\eta\eta}). \quad (15)$$

In the parabolic coordinates, the flat plate is at  $\eta = 0$ . The free stream conditions and boundary conditions can be expressed in terms of the parabolic coordinates by the above relations.

### Construction of Solutions in Parabolic Coordinates

Consider first the behavior of the solution at large  $\eta$ . In view of (6), the solution at large  $\eta$  may be written in the following form

$$\psi = 2 \omega_0 \xi^2 f_2(\eta) + \xi f_1(\eta) + f_0(\eta) + \dots, \quad (16)$$

and, as  $\eta \rightarrow \infty$ , the functions  $f_2$  and  $f_1$  become

$$f_2(\eta) \rightarrow 2 \eta^2 - \beta_3 \eta - \beta_2, \quad f_1(\eta) \rightarrow 2 \eta - \beta_1,$$

where  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  and  $\beta_3$  represent the displacement effects. Since the above form of the solution does not predicate to be the general one valid over the whole field, it is not expected that  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  and  $\beta_3$  are constant over the whole field. In fact, their values may change from region to region for which different methods are used to find the solutions  $f_1$  and  $f_2$ .

From equations (11) and (12), it is found that, for large  $\eta$

$$u \rightarrow 1 + 4 \omega_0 \xi \eta - \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left\{ \frac{1}{2} \beta_1 \eta + 2 \beta_2 \omega_0 \xi \eta + \beta_3 \omega_0 \xi (\xi^2 + 2 \eta^2) \right\}, \quad (17)$$

$$v \rightarrow \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left\{ \frac{1}{2} \beta_1 \xi + 2 \beta_2 \omega_0 \xi^2 + \beta_3 \omega_0 \xi^2 \eta \right\}. \quad (18)$$

Thus, for  $\xi \ll \eta$ , the velocity component  $u$  approaches  $1 + 4 \omega_0 \xi \eta - 2 \beta_3 \omega_0 \xi$  as  $\eta$  approaches infinity. If the parabolic coordinates are the optimal ones, the solution obtained in these coordinates should yield  $\beta_3=0$ , because the displacement effects should vanish far upstream of the plate. This can be shown as follows. For  $\xi \ll \eta$ , the stream function  $\psi$  can be expressed in the following form

$$\psi = \xi f_1(\eta) + 2 \omega_0 \xi^2 \eta F_2(\eta) + \xi^3 f_3(\eta) + \dots, \quad (19)$$

where, as  $\eta$  approaches infinity,

$$f_1(\eta) \rightarrow 2 \eta - \beta_1, \quad (20)$$

$$F_2(\eta) \rightarrow 2 \eta - \beta_3. \quad (21)$$

Substitution of  $\psi$  into equation (14) yields, when all higher order terms in  $\xi$  are omitted,

$$f_1 (F_2 - \eta F_2') - 2 \eta F_2'' = 0. \quad (22)$$

When  $\eta$  approaches infinity,  $F_2'' \rightarrow 0$ . It follows that  $\beta_3 = 0$ . Hence, far upstream, the smooth transition of the flow is achieved.

For large  $\xi$ , the smooth transition is possible only when  $\beta_2 = \beta_3 = 0$ . As will be seen later, this is found to be true. Since  $v$  approaches zero and  $\omega$

approaches  $\omega_0$  as  $\eta$  approaches infinity, it might be concluded that all the conditions (6), (7) and (8) are satisfied. However, for  $\xi \sim \eta$ , the expression for  $v$  contains the term  $\beta_3 \omega_0 \xi^2 \eta / (\xi^2 + \eta^2)$  which is singular as  $\eta \rightarrow \infty$  and hence is incompatible with smooth transition. This point will be analyzed later in this paper.

From the above consideration, similar solutions can be constructed in the following manner. Let the similarity variable  $\zeta$  be defined by

$$\zeta = \frac{\eta}{\xi^k}$$

and the solution be of the form

$$\psi = 2 \omega_0 \xi^{2+2k} f_2(\zeta) + \xi^{1+k} f_1(\zeta) + \dots, \quad (23)$$

where  $f_2$  and  $f_1$  are required to behave as  $f_2'' \rightarrow 4$ ,  $f_1' \rightarrow 2$ , when  $\zeta$  approaches infinity. Then, for large  $\eta$ , the above solution for  $\psi$  agrees with that given in equation (16). The index  $k$  is to be determined from the condition that the viscous terms and inertia terms in the Navier-Stokes equations have the same order of magnitude.

Now two forms of asymptotic solutions for large  $\xi$  can be obtained according to the stipulation whether the first or the second term in equation (23) is considered as the dominating term. For small values of  $\omega_0 \xi$  the second term in equation (23) may be taken as the first approximation of the series expansion solution. Thus

$$\psi = \xi f_1(\eta) + 2 \omega_0 \xi^2 f_2(\eta) + \xi^3 f_3(\eta) + \dots, \quad (24)$$

since it is found that  $k = 0$ . Substitution of (24) into equation (14) and equating equal powers of  $\xi$  yield the following equations

$$f_1'''' + f_1 f_1''' + f_1' f_1'' = 0, \quad (25)$$

$$f_2''' + f_1 f_2'' - f_1' f_2' + 2 f_1'' f_2 = 0, \quad (26)$$

etc. The boundary conditions are

$$f_1' \rightarrow 2, \quad \eta \rightarrow \infty, \quad (27)$$

$$f_1 = f_1' = 0, \quad \eta = 0. \quad (28)$$

$$f_2'' \rightarrow 4, \quad \eta \rightarrow \infty, \quad (29)$$

$$f_2 = f_2' = 0, \quad \eta = 0, \quad (30)$$

etc. Equation (25) under the boundary conditions (27) and (28) yields the known boundary layer solution in parabolic coordinates for a uniform flow over a flat plate [2].

On the other hand, for large values of  $\xi$ , an asymptotic series solution may be attempted. It is found that, for this case,  $k = -1/3$ , and the solution is of the form

$$\psi = 2\omega_0 \xi^{4/3} g_2(\zeta) + \xi^{2/3} g_1(\zeta) + g_0(\zeta) + \dots \quad (31)$$

The function  $g_2$  satisfies

$$\frac{8\omega_0}{3} g_2 g_2''' + g_2'''' = 0, \quad (32)$$

and the boundary conditions

$$g_2'' \rightarrow 4, \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad (33)$$

$$g_2 = g_2' = 0, \quad \zeta = 0. \quad (34)$$

The solution for  $g_2$  is  $2\zeta^2$ , which represents a simple shear flow. Thus, since  $\beta_2 = \beta_3 = 0$ , smooth transition of the flow is also achieved at large  $\xi$ . The function  $g_1$  satisfies

$$\frac{3}{4\omega_0} g_1'''' + 2g_2 g_1''' + g_2' g_1'' + \zeta g_2'' g_1' + g_2''' g_1 = 0, \quad (35)$$

and

$$g_1' \rightarrow 2, \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad (36)$$

$$g_1 = g_1' = 0, \quad \zeta = 0. \quad (37)$$

Detailed analysis of the above solutions will not be given here, because the solutions of equations (26) and (35) under respective boundary conditions can be expressed in terms of the known ones in the Cartesian coordinates [5] [6]. By the transformation  $\eta = \eta^*/2$ , equation (26) becomes

$$2f_2''' + f_1 f_2'' - f_1' f_2' + 2f_1'' f_2 = 0, \quad (38)$$

with the boundary conditions  $f_2'' \rightarrow 1$ ,  $\eta^* \rightarrow \infty$ ;  $f_2 = f_2' = 0$ ,  $\eta^* = 0$ . The solution for  $f_2$  satisfying the above conditions has been obtained by GLAUERT [5]. The value of  $\beta_1$  is 1.73, while that of  $\beta_3$  as estimated from GLAUERT's results is about 3.4 (GLAUERT argued that  $\beta_3 = 2\beta_1 = 3.46$  in our notation).

In an analogous manner, let

$$g_1 = \left(\frac{3}{2\omega_0}\right)^{1/3} G_1(\zeta^*), \quad (39)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2\omega_0}\right)^{1/3} \zeta^*. \quad (40)$$

Equation (35) becomes, in view of the fact that  $g_2 = 2\zeta^2$ ,

$$G_1'''' + \zeta^{*2} G_1''' + \zeta^* G_1'' = 0,$$



or

$$G_1''' + \zeta^{*2} G_1'' - \zeta^* G_1' + G_1 = 0. \quad (41)$$

The boundary conditions for  $G_1$  are  $G_1' \rightarrow 1$ ,  $\zeta^* \rightarrow \infty$ , and  $G_1 = G_1' = 0$  at  $\zeta^* = 0$ . The solution for  $G_1$  has been analyzed in [6]. It may be added, however, that the asymptotic series solution does not appear to be valid near the leading edge of the plate, while the series expansion solution becomes inadequate far downstream. Thus, to obtain a complete solution of the problem, a matching or correlating process is used in [6].

### A Modified Coordinate System

As shown above, the parabolic coordinates can be used to obtain solutions of the shear flow such that a smooth transition of the shear flow to the free stream flow is achieved. However, for the region near the leading edge of the plate, the displacement effects introduce the contribution  $\beta_3 \omega_0 \xi^2 \eta / (\xi^2 + \eta^2)$  in the velocity component  $v$ . This term becomes singular as  $\eta \rightarrow \infty$ , when  $\xi \sim \eta$ , since  $\beta_3$  is expected to be close to the value of 3.4 as obtained from GLAUERT'S work. Therefore, it appears that a modification of the coordinate system should be made for  $\xi \sim \eta$ , but not at large  $\xi$  or  $\eta$ , to remove this singular behavior of  $v$ . For simplicity, consideration will be limited to  $\xi > \eta$ . A coordinate system which meets these conditions and, in addition, yields  $y = 0$  when  $\eta = 0$  is

$$x = \xi^2 - \eta^2, \quad (42)$$

$$y = 2\xi\eta + \frac{1}{2}\beta_3\eta. \quad (43)$$

For large  $x$ ,  $\xi$  is essentially  $x^{1/2}$  and  $\eta$  is essentially  $y/(x^{1/2} + \beta_3/2)$ . It is noted that this coordinate system is no longer orthogonal as a simple orthogonal coordinate system satisfying the necessary conditions has not been found. The functions  $f_1$  and  $f_2$  in the expression (24) for the stream function  $\psi$  are found to satisfy the same respective differential equations and boundary conditions (25)–(30). Hence in equation (43),  $\beta_3$  is 3.4. As  $\eta$  approaches infinity, the velocity components  $u$  and  $v$  are

$$\left. \begin{aligned} u &\rightarrow 1 + 4\omega_0\xi\eta - \frac{1}{4(\xi^2 + \eta^2) + \beta_3\xi} \\ &\quad \times \{2\beta_1\eta + 8\beta_2\omega_0\xi\eta + \beta_3\xi + 4\beta_3\omega_0\xi(\xi^2 + \xi\eta + 2\eta^2) + \dots\}, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} v &\rightarrow \frac{1}{4(\xi^2 + \eta^2) + \beta_3\xi} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2}\beta_1 + 2\beta_1\xi + 8\beta_2\omega_0\xi^2 - \beta_3\eta + 2\beta_3\omega_0\xi(\beta_2 + \beta_3\eta) + \dots \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

The skin friction distribution on the plate can be obtained from equations (11) and (24), and is given by

$$\tau = \frac{\rho U_0^2 x^{1/2}}{4 \left( x^{1/2} + \frac{1}{2} \beta_3 \right)^2} \{ f_1''(0) + 2 \omega_0 x^{1/2} f_2''(0) + \dots \}. \quad (46)$$

As seen from equation (43), the new  $y$  coordinate is stretched compared to that given by the parabolic coordinates. Thus, the skin friction on the plate is reduced accordingly.

It is evident that the 'free stream conditions' for the region near the leading edge of the plate has direct bearing on the skin friction distribution on the plate. It is also noted that near the leading edge of the plate,  $v$  approaches approximately the value of  $\beta_2 \omega_0 + (\beta_3^2 \omega_0 / 4)$ . Therefore, the condition (7) for smooth transition is actually not satisfied. It may be possible to modify further the coordinate system in order to satisfy this condition, but the skin friction distribution on the plate will certainly be changed. Thus, it appears reasonable that different conditions for smooth transition for the region near the leading edge of the plate may be associated with physically different problems. Therefore, for the region near the leading edge of the plate the condition for smooth transition for  $v$  may be modified so that  $v$  approaches a constant value as  $\eta$  approaches infinity.

### Some General Remarks

The problem of the boundary layer on a flat plate in a stream of constant vorticity has been analyzed by GLAUERT [5] and LI [7] by employing the Cartesian coordinates. In particular, GLAUERT proposed to use the boundary condition

$$u = 1 + 2 \omega_0 y, \quad x = 0, \quad (47)$$

instead of

$$u \rightarrow 1 + 2 \omega_0 y, \quad y \rightarrow \infty. \quad (48)$$

Of course, when the solution of the problem is expressed in the variable  $\eta = Y (U_0/\nu X)^{1/2}$ , there is no difference between the two conditions (47) and (48). The solution would be defined only for positive  $x$ .

By using the parabolic coordinates, it has been shown that the solution can be extended upstream of the leading edge of the plate such that the free stream condition  $u = 1 + 2 \omega_0 y$  is satisfied far upstream. By the analysis given earlier for the differential equations (26) and (35), it is seen that the solution in Cartesian coordinates obtained by GLAUERT and that in parabolic

coordinates yield the same skin friction distribution on the plate:

$$\tau = \varrho \left( \frac{\nu U_0^3}{X} \right)^{1/2} \left\{ .332 + 1.59 \omega_0 \left( \frac{U_0 X}{\nu} \right)^{1/2} + \dots \right\}.$$

According to equations (17) and (18), the condition (47), although mathematically convenient, may not be quite realistic physically. In fact, (48) appears to be more satisfactory, provided displacement effects are to be admitted and one does not interpret equation (48) to mean that  $u$  shall be constant at fixed  $y$ . The fact that the skin friction distribution on the plate depends intimately on the free stream conditions for the region near the leading edge of the plate demonstrates the difficulty of imposing proper boundary or initial conditions at  $x = 0$ .

## REFERENCES

- [1] S. KAPLUN, *The Role of Coordinate Systems in Boundary Layer Theory*, Z. Angew. Math. Phys., **5**, 111–135 (1954).
- [2] G. F. GARRIER and C. C. LIN, *On the Nature of the Boundary Layer near the Leading Edge of a Flat Plate*, Quarterly of Applied Mathematics, **6**, 63–68 (1948).
- [3] K. T. YEN, *A Study of the Use of Optimal Coordinates for Some Viscous Flow Problems*, TR AE5805, Rensselaer Polytechnic Institute, AFOSR TN-59-11, AD 208 592, April 1958.
- [4] H. SCHMIDT and K. SCHROEDER, *Laminare Grenzschichten*, Luftforschung, **19**, 65–97 (1942).
- [5] M. B. GLAUERT, *The Boundary Layer in Simple Shear Flow Past a Flat Plate*, Readers' Forum, Journal of the Aeronautical Sciences, **24**, No. 11, 848–49 (1957).
- [6] K. T. YEN, *The Boundary Layer on a Flat Plate in a Shear Flow* (to be published).
- [7] T. Y. LI, *Simple Shear Flow Past a Flat Plate in an Incompressible Fluid of Small Viscosity*, Readers' Forum, Journal of the Aeronautical Sciences, **22**, No. 9, 651–652 (1957).

## Zusammenfassung

In eine ebene inkompressible Strömung mit konstantem Geschwindigkeitsgradienten quer zur Strömung sei eine ebene Platte parallel gelegt. Als günstiges Koordinatensystem werden parabolische Koordinaten betrachtet und damit ähnliche Lösungen gefunden. Der Übergang von der Grenzschicht zur äusseren Strömung vollzieht sich glatt, und es können Wandschubspannungen und Verdrängungseffekte bestimmt werden. Vergleiche mit anderen Lösungen, die mit kartesischen Koordinaten gefunden wurden, werden angestellt.

(Received: October 26, 1959.)

## Zur Eiskeimbildungsfähigkeit von Kupferoxyden und Kupfersulfiden

Von ULRICH KATZ, Zürich<sup>1)</sup>

### 1. Einleitung

Im Zuge der systematischen Ermittlung der Aktivität der verschiedensten Substanzen als Eiskeimbildungskerne gilt den Kupferoxyden und Kupfersulfiden spezielles Interesse, da sich schon bei früheren Messungen der Einsatztemperatur der Wirksamkeit von  $\text{Cu}_2\text{O}$  und  $\text{CuS}$  (PRUPPACHER und SÄNGER [8]<sup>2)</sup>, FUKUTA [4]) die verhältnismässig hohen Werte von  $-4$  bis  $-5^\circ\text{C}$  ergaben. Ferner bestanden Zweifel an der oberflächlichen Reinheit einiger dabei verwendeter, auf nassem Wege erzeugter Substanzen; bei  $\text{Cu}_2\text{O}$  wäre vor allem damit zu rechnen, dass die Oberfläche schon zu  $\text{CuO}$  oxydiert ist und eine Aktivität von  $\text{Cu}_2\text{O}$  als Eiskeimbildungskern nicht oder nur teilweise erfasst wird<sup>3)</sup>; ebenso könnte an Stelle von  $\text{CuS}$  bei Herstellung auf chemischem Wege ein Gemisch von beispielsweise  $\text{CuS}$ ,  $\text{Cu}_2\text{S}$  und  $\text{S}$  entstehen. Deshalb schien es angezeigt, die erwähnten Stoffe direkt in Form reiner makroskopischer Kristallite herzustellen.

Während bis anhin im allgemeinen als Mass der Eiskeimbildungsaktivität einer Substanz nur deren Einsatztemperatur gemessen wurde, ist es vor allem auch im Hinblick auf eine Anwendung zum Zwecke der Wetterbeeinflussung wesentlich, den Anteil eines künstlichen Aerosols, welcher zur Eiskristallbildung Anlass gibt, als Funktion der Temperatur zu kennen; auch über den Mechanismus der Eiskeimbildung können auf diese Weise eher Aufschlüsse gewonnen werden als mit blossen Schwellentemperatur-Angaben. Allerdings wird für  $\text{AgI}$  schon seit längerer Zeit meist die Anzahl aktiver Teilchen pro Gramm Substanz in Funktion der Temperatur angegeben [9, 11, 12]; neuestens findet man auch bei SERPOLAY [10] für einige Oxyde das Verhältnis wirksamer Teilchen zu deren Gesamtzahl.

### 2. Eigenschaften und Herstellung der Substanzen<sup>4)</sup>

#### 2.1 $\text{Cu}_2\text{O}$ und $\text{CuO}$

Das rote Kupferoxydul, das dem Mineral Cuprit entspricht, bildet einen eigenen kubischen Gittertyp, während  $\text{CuO}$ , das schwarze Kupferoxyd (Tenorit) in einem triklin deformierten Steinsalzgitter kristallisiert. Die  $\text{Cu}_2\text{O}$ -Oberfläche adsorbiert zuerst  $\text{O}_2$  aus der Luft, später tritt eine sehr langsame oberflächliche Umwandlung in das  $\text{CuO}$ -Gitter ein [5]. Aber auch sehr lange an Luft gelagertes  $\text{Cu}_2\text{O}$  liess nach den Beobachtungen von BRÜESCH [2] mittels Elektronenbeugung (noch feststellbare Schichtdicke: etwa  $70 \text{ \AA}$ ) keine Oxydation erkennen.

<sup>1)</sup> Laboratorium für Atmosphärenphysik an der ETH.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 244.

<sup>3)</sup> Dieser Gedanke wurde auch in einer privaten Mitteilung von J. H. SCHULMAN (Columbia University) gegenüber dem Leiter des Laboratoriums für Atmosphärenphysik vertreten.

<sup>4)</sup> Unter Mitwirkung von M. BAUD (im Rahmen seiner Diplomarbeit).

Da CuO oberhalb  $1110^{\circ}\text{C}$  an der Luft zu  $\text{Cu}_2\text{O}$  dissoziiert, wäre es möglich, massives  $\text{Cu}_2\text{O}$  durch Schmelzen ( $1230^{\circ}\text{C}$ ) des im Handel erhältlichen Pulvers zu bilden, wenn nicht alle Tiegelmaterien dabei zerstört würden. Das Cu-O-Zustandsdiagramm [5] zeigt, dass aus metallischem Kupfer direkt durch Erhitzen an der Luft im Temperaturintervall von  $1026$  bis  $1065^{\circ}\text{C}$  das Oxydul entsteht; als günstiger Wert erwies sich  $1030^{\circ}\text{C}$ , wobei  $0,8$  mm Kupferblech in 5 Stunden gänzlich durchoxydiert war. Beim Erkalten bildete sich an der Oberfläche CuO, weshalb die Abkühlung im Vakuum zu erfolgen hat. Die Prüfung dieser  $\text{Cu}_2\text{O}$ -Proben mittels Schliff, Röntgen- und Elektronendiffraktographie zeigte absolut homogene, bis  $1$  mm grosse Kristallite ohne Spuren von CuO.

Die Eigenschaften des im Handel erhältlichen Kupferoxyds (pro anal., Merck & Co.) gaben keine Veranlassung, dieses selbst herzustellen, da eine weitere Veränderung an der Luft nicht eintritt.

## 2.2 $\text{Cu}_2\text{S}$ , $\text{Cu}_9\text{S}_5$ und CuS

Diese unter Normalbedingungen stabilen Verbindungen entsprechen den folgenden natürlichen Mineralien:

$\beta\text{-Cu}_2\text{S}$	Chalkosin, orthorhombisch
$\text{Cu}_9\text{S}_5$	Digenit, kubisch
CuS	Covellin, hexagonal

Weitere, nur auf nassem Wege erhältliche Polysulfide sollen hier nicht zur Diskussion stehen.

Bei allen drei Substanzen weist die Löslichkeit den sehr geringen Wert von ungefähr  $10^{-14}$  Mol/l auf. Während CuS an der Luft äusserst langsam zu Sulfat oxydiert, sind  $\text{Cu}_2\text{S}$  und  $\text{Cu}_9\text{S}_5$  in der Atmosphäre sehr stabil [5].

Zur Herstellung wurden als Ausgangsmaterialien Elektrolytkupfer-Pulver und Schwefelblüten verwendet; das Kupfer reduzierte man im  $\text{H}_2$ -Strom bei  $400^{\circ}\text{C}$  und der Schwefel wurde bei  $100^{\circ}\text{C}$  im Vakuum getrocknet und von  $\text{SO}_2$  und  $\text{H}_2\text{S}$  befreit. Für  $\text{Cu}_2\text{S}$  und  $\text{Cu}_9\text{S}_5$  erwies es sich als notwendig, die beiden Edukte in stöchiometrischem Verhältnis innig zu mischen und bei einem Druck von  $1000$  at zu Pillen zu pressen, um diese sodann in einem Quarzrohr unter Vorvakuum einzuschmelzen. Anschliessend erfolgte die Behandlung im Ofen: in 60 Minuten aufheizen auf  $1200^{\circ}\text{C}$ , welche Temperatur während 20 Minuten beibehalten wird; hierauf abkühlen in einer Stunde. Die Röntgenanalysen ergaben gute Übereinstimmung mit den zuverlässigsten Literaturwerten [13].

Zur Darstellung von CuS genügte es, Kupfer und Schwefel im Überschuss je in ein Quarzschiffchen zu bringen und diese hintereinander in ein Quarzrohr zu legen, welches nach Evakuieren auf  $10^{-3}$  Torr zugeschmolzen und während 12 Stunden bei  $450^{\circ}\text{C}$  belassen wurde. Wie auf Grund des Zustandsdiagramms erwartet, war das Cu-Pulver vollständig durchschwefelt worden und das tiefblaue Pulver ergab die röntgenographischen CuS-Werte [1].

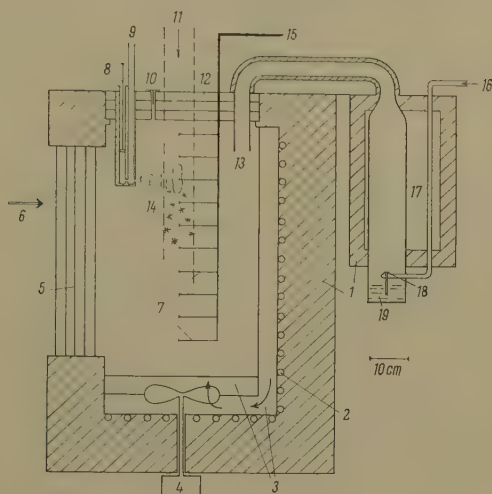
## 3. Messmethode und Apparatur

Die Güte eines gewissen Aerosols als Eiskeimbildungskern bei einer Temperatur  $T$  sei  $q(T)$  und bedeute den Quotienten aus der Anzahl Kernteilchen, die zur Bildung eines Eiskriställchens Anlass geben, und der Gesamtzahl der Partikeln, welche in einem unterkühlten Wassernebel der Temperatur  $T$  eingeimpft werden.



In der vorliegenden Arbeit ermittelt man  $q(T)$  für die oben beschriebenen Substanzen direkt in der Definition entsprechenden Weise, indem in einer Kühlkammer eine Wolke erzeugt, eine bekannte Anzahl Teilchen in diese hineingespritzt und hierauf die Zahl der sich bildenden Eisteilchen bestimmt wird.

Der zentrale Teil der hiezu benützten Apparatur (Figur 1) ist die Wolkenkühlkammer, die ursprünglich lediglich zur Messung von Schwellentemperaturen



Figur 1

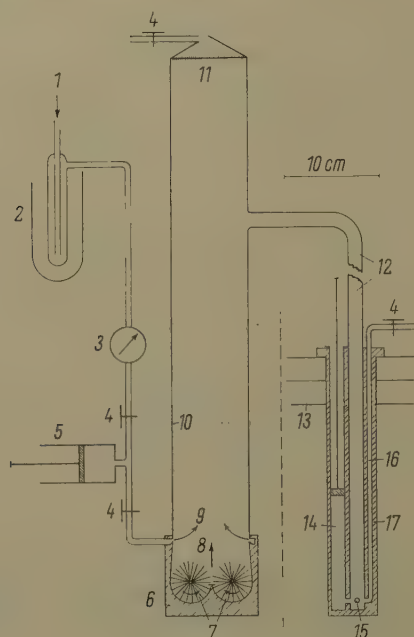
Schema der Wolkenkammer. 1 Isolation; 2 Verdampferrohr; 3 zirkulierende Kühlluft; 4 Ventilator für 3; 5 isolierende Verglasung; 6 Beobachtungsrichtung; 7 Thermoelemente; 8 Sedimentationszelle; 9 Impfrohr; 10 Luftauslass; 11 Beleuchtung; 12 Plexiglasdeckel; 13 Nebelneinlass; 14 Aerosol-Einspritzung; 15 zum Kompensationsschreiber; 16 Pressluft; 17 Eiswasser; 18 Verneblerdüse; 19 destilliertes Wasser.

gebaut worden war; der eigentliche Versuchsraum (Volumen 100 l) wird auf drei Seiten und am Boden von gekühlter Luft umspült, was einen kleinen, aber nicht verschwindenden vertikalen Temperaturgradienten ergibt (0,02 bis 0,1°C/cm je nach Temperatur). Zur visuellen Beobachtung der Vorgänge im Innern ist die vierte Seite isolierend verglast. Ein dreifacher abnehmbarer Plexiglasdeckel ermöglicht die Beleuchtung senkrecht zur Beobachtungsrichtung durch ein 8 cm breites Strahlenbündel einer horizontal verschiebbaren Hg-Hochdrucklampe.

Die Erzeugung der unterkühlten Wolke erfolgt durch mechanisches Zerstäuben destillierten Wassers an einer mit gekühlter und elektrostatisch sehr wirksam gefilterter (vgl. Liss [7]) Pressluft beschickten Düse; in einem vertikalen Zylinder wird der Nebel auf 0°C gekühlt und von zu grossen Tropfen befreit, worauf er in die Kammer gelangt, aus der er die vom vorhergehenden Versuch verunreinigte Luft verdrängt. Nach der Einführung des Nebels verstreichen etwa 90 Sekunden, bis sich die Turbulenz gelegt hat und die normale Temperaturverteilung wiederhergestellt ist; da die Tröpfchen teils absinken, teils verdampfen, bleibt die Wassersättigung nur noch während rund vier Minuten erhalten, in welcher Zeit die Messung durchgeführt werden muss.

Ein Kompensationsschreiber registriert die von zehn in der Kammer verteilten Thermoelementen gemessenen Temperaturen.

Die dosierte Eingabe von Kernpartikeln in die Wolke geschieht am besten in Luft suspendiert. Bei vielen Substanzen in Pulverform neigen die Partikelchen zu Konglomeratbildung, was die Dispersion in Luft erschwert. Mit der hier verwendeten Vorrichtung (Figur 2) konnten dennoch gute Resultate erzielt werden. Zwei



Figur 2

Schema der Impfvorrichtung. 1 Zufuhr reiner Luft; 2 Kühlfalle zur Trocknung; 3 Durchflussmesser; 4 Hahnen; 5 Dosiereinrichtung; 6 Zerstäubergehäuse; 7 rotierende Bürsten; 8 Weg der Staubteilchen; 9 Luftstrom; 10 Glaszylinder; 11 Filter; 12 Zuführungsrohr in die Kammer; 13 Plexiglasdeckel; 14 Sedimentationszelle; 15 Öffnung zum Impfen; 16 Luftabfuhr; 17 Zapfen, der in die Kammer hineinragt.

zylindrische Nylonbürsten rotieren um ihre horizontale Achse in einem entsprechenden Gehäuse, das nur gegen oben geöffnet ist und auch das zu dispergierende Pulver enthält; wenn die Borsten in horizontaler Lage sind, treffen sie auf ein Hindernis, worauf ihre Enden stark beschleunigt und die daran haftenden Partikeln in den vertikalen Luftstrom geschleudert werden, der seiner Geschwindigkeit gemäss nur Teilchen unterhalb eines bestimmten Grenzdurchmessers mitnimmt. Die hier zur Verwendung gelangende Luft wurde bereits elektrostatisch gefiltert und in Kühlfallen getrocknet. Aus dem Aerosolvorrat im Zylinder über dem Pulverzerstäuber wird ein vertikales Rohr (Durchmesser 16 mm) gefüllt, das von oben ins Innere der Kammer führt. Mit einer Dosiereinrichtung kann nun wahlweise aus diesem Rohr ein bestimmtes Volumen in die Wolke gespritzt oder in eine Sedimentationszelle abgefüllt werden. Letztere besteht aus einem Metallzylinder ( $\varnothing$  14 mm)

mit verschiebbarem Kolben; ein Objektträger (Glasplättchen oder Formvar-Haut) am Boden der Zelle fängt die darin ausfallenden Partikeln auf. Um die Konzentration des in die Wolke geblasenen Aerosols zu kennen, muss ein repräsentatives Luftvolumen aus dem Rohr in die Sedimentationszelle gefüllt werden; in praxi wird vor und nach dem Impfen der Wolke je eine Probe entnommen und dann geeignet interpoliert. Die Einführung des Aerosols in den Nebel erfolgt im oberen Drittel der Kammer durch horizontales Einblasen von  $10^4$  bis  $10^7$  Partikeln in 0,5 bis 20 cm<sup>3</sup> Luft; da diese schon im vertikalen Rohr ungefähr Kammertemperatur angenommen hat, wandert das eingespritzte Volumen in Form eines Wirbelringes horizontal gegen die Mitte der Kammer, wobei dieser und die daraus herausfallenden Eiskriställchen im parallelen Licht gut beobachtet und gezählt (bzw. geschätzt) werden können.

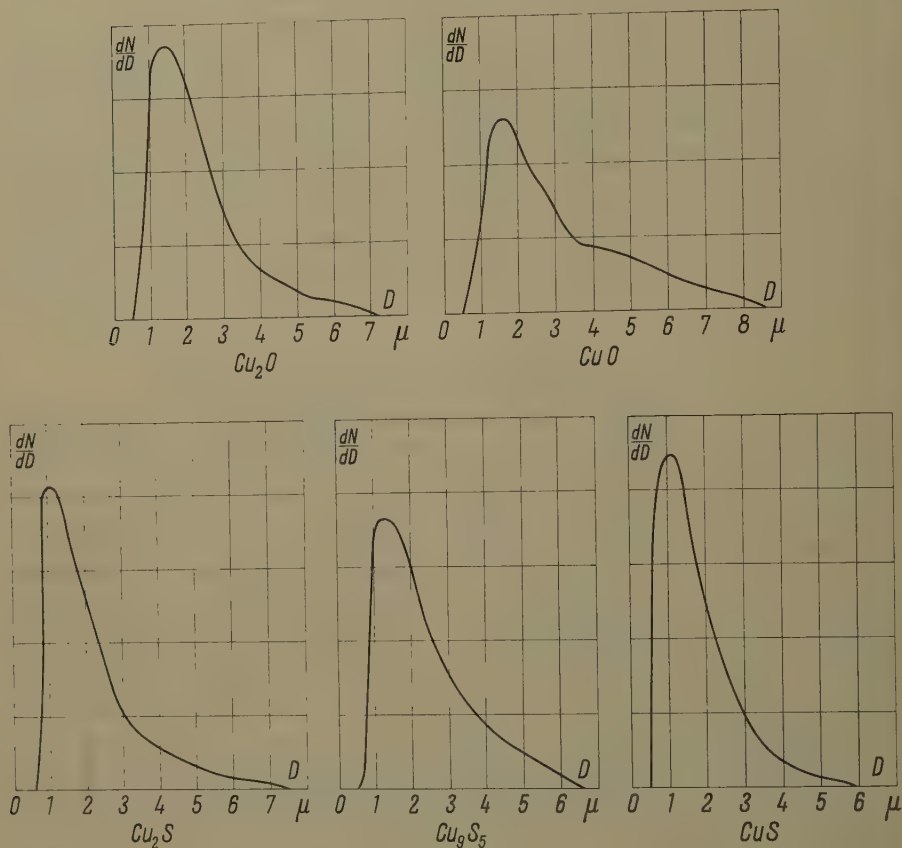
#### 4. Messungen und Diskussion der Resultate

Die Substanzen wurden in der Achatschale von Hand zu Pulver zerrieben; da die Messung an einem Stoff etwa 3 Tage beanspruchte, erfolgte das Zerkleinern 10 Tage vor Messbeginn, damit sich eventuell an der Oberfläche abspielende Veränderungen nicht im Laufe der Messung störend auswirkten.

Bei der mikroskopischen Auszählung der Sedimentationsproben wurden die Grössenverteilungen ermittelt, die in Figur 3 dargestellt sind; kleinere Schwankungen waren dabei nicht zu vermeiden, doch ergab die stichprobenweise elektronenmikroskopische Untersuchung keine Teilchen mit Durchmessern unterhalb etwa 0,5  $\mu$ . Diese Begrenzung erschien uns sehr wünschenswert, da einerseits die Sedimentationsproben rasch hergestellt sind, und andererseits, weil auf Grund theoretischer Überlegungen (z. B. FLETCHER [3]) unterhalb des erwähnten Grenzdurchmessers eine immer stärker werdende Abhängigkeit der Aktivität von der Partikelgrösse zu erwarten ist.

Beim Einblasen der Impfstoffe in die Tröpfchenwolke zeigte es sich, dass nach 2 bis 5 Sekunden die Eiskristallbildung am intensivsten und nach etwa 10 Sekunden bereits auf ein vernachlässigbares Mass abgesunken war. Ferner konnte keine wesentliche Abhängigkeit der Aktivität von Radius und Konzentration der Nebeltröpfchen beobachtet werden, solange deren Vorhandensein 100% relative Feuchtigkeit gewährleistete; nach der Auflösung der Wolke jedoch traten Eiskristalle nur noch in sehr reduziertem und verzögertem Masse auf. Die vorliegenden Resultate beziehen sich aber ausschliesslich auf den Fall der Wasserdampfsättigung.

Figur 4 und 5 zeigen  $q(T)$  logarithmisch aufgetragen; die starke Streuung der einzelnen Messpunkte rührt vor allem von der visuellen Abschätzung der Anzahl sich bildender Eiskristalle her. Infolge nicht zu vermeidender Turbulenz in der Kammer muss mit einer Unsicherheit der Temperaturmessung von max.  $\pm 0,5^\circ\text{C}$  gerechnet werden. Aus apparativen Gründen konnten  $q$ -Werte unterhalb  $10^{-6}$  nicht mehr gemessen werden, doch lassen die Kurven das Erreichen einer oberen Grenztemperatur (Schwellentemperatur) erkennen und abschätzen. Für  $\text{Cu}_2\text{O}$  und  $\text{CuO}$  (Figur 4) ergaben sich praktisch die gleichen Schwellentemperaturen, wie sie schon PRUPPACHER und SÄNGER [8] fanden, während FUKUTA [4] für beide Stoffe etwa  $-4^\circ\text{C}$  angibt. Ausser bei  $-35^\circ\text{C}$ , wo beide Substanzen die gleiche Aktivität zeigen, lässt der deutliche Unterschied den Schluss zu, dass bei  $\text{Cu}_2\text{O}$  die Partikeloberfläche noch nicht wesentlich oxydiert war. Bei den Kupfersulfiden (Figur 5) fällt die nahezu gleiche Schwellentemperatur auf, während sich die  $q$ -Werte zum Beispiel bei  $-10^\circ\text{C}$  um Grössenordnungen unterscheiden. Die Grenztemperatur von  $\text{CuS}$  differiert mit  $-5^\circ\text{C}$  nur leicht von den Werten anderer Autoren ( $-4^\circ\text{C}$  [8],  $-7,3$  [4]).

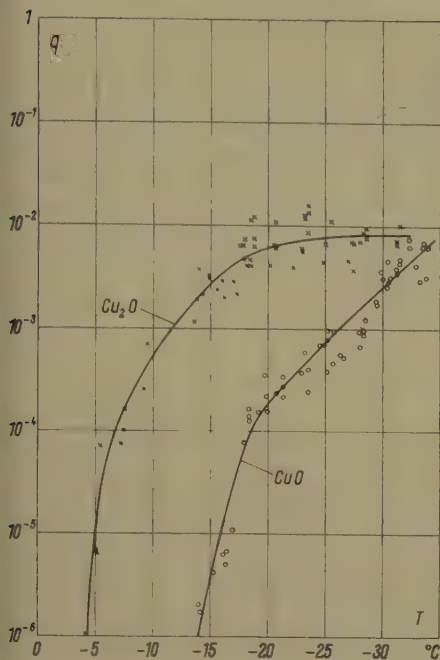


Figur 3

Relative Häufigkeit der Teilchen in Funktion ihres Durchmessers  $D$ . (Die Ordinate ist in willkürliche Einheiten geteilt.)

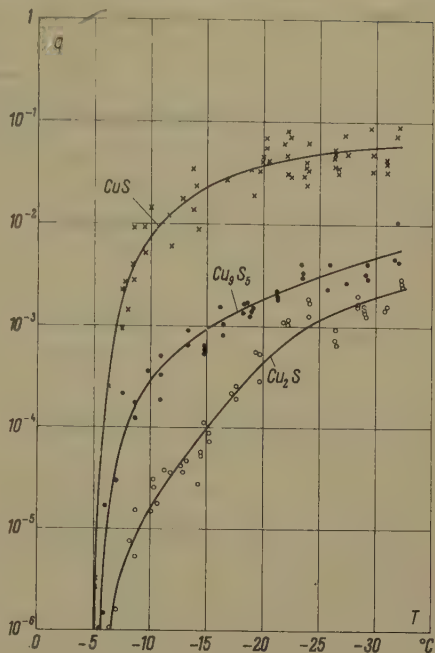
Infolge des einsetzenden spontanen Gefrierens von Nebeltröpfchen unterhalb von etwa  $-33^\circ\text{C}$  konnten die Kurven nicht bis  $-40^\circ\text{C}$  ermittelt werden, womit auch über den Anstieg der Wirksamkeit unterhalb  $-30^\circ\text{C}$  keine Aussagen zu machen sind, insbesondere nicht über die interessante Frage, ob bei  $\text{CuS}$  und  $\text{Cu}_2\text{O}$  ein Grenzwert der Aktivität bei etwa  $-30^\circ\text{C}$  erreicht wird.

Für  $\text{AgI}$ -Rauch haben verschiedene Autoren, wie SANO [9], SMITH und HEFFERNAN [11] und SOULAGE [12], eine zur unseren analoge Kurve angegeben, und FLETCHER [3] interpretiert den Anstieg der Aktivität mit sinkender Temperatur als Folge der Größenverteilung der Teilchen; wenn auch eine starke Temperaturabhängigkeit der Aktivität bei Teilchengrößen unterhalb  $0,1 \mu$  durchaus verständlich ist und experimentell von HOSLER [6] und SANO [9] bestätigt wurde, so können doch FLETCHERS Berechnungen in unserem Falle keine hinreichende Erklärung für den Anstieg über ein Intervall von mehr als  $15^\circ\text{C}$  liefern, sondern es wäre danach nur



Figur 4

Eiskeimbildungsaktivität  $q$  von  $\text{Cu}_2\text{O}$  und  $\text{CuO}$  in Funktion der Temperatur  $T$ .



Figur 5

Eiskeimbildungsaktivität  $q$  von  $\text{Cu}_2\text{S}$ ,  $\text{Cu}_9\text{S}_5$  und  $\text{CuS}$  in Funktion der Temperatur  $T$ .

ein solches von etwa  $4^\circ\text{C}$  zu erwarten; dies um so mehr, als hier kristalline, eckige Partikeln mit ebenen Flächen zur Verwendung gelangten, während FLETCHER kugelförmige Teilchen voraussetzte.

Bei seiner jüngsten Untersuchung der Eiskeimbildung an verschiedenen Metalloxyden hat SERPOLAY [10] für ein Kupferoxyd einen ähnlichen Verlauf von  $q(T)$  erhalten, doch erreicht die Kurve schon bei  $-20^\circ\text{C}$  Werte von  $q \approx 0,5$ . Für diese Diskrepanz könnte einerseits die unterschiedliche Messmethode verantwortlich sein, liegen doch die Partikeln bei SERPOLAY auf einer gekühlten Unterlage, die den Eiskeimbildungsmechanismus eventuell auch beeinflusst; der zweite Grund aber ist in der verschiedenen Herstellungsmethode zu suchen, womit SERPOLAY auf eigentliche Katalysatoren abzielt, die durchwegs sehr porös sind und damit eine ausserordentlich grosse spezifische Oberfläche aufweisen.

Bemerkenswert an unseren Messungen ist, dass Stoffe, die auf Grund ihrer Schwellentemperatur als gute Eiskeimbildungskerne anzusprechen sind, auch bei relativ tiefen Temperaturen eine sehr kleine Aktivität von nur einigen Promille oder Prozent aufweisen. Dies liesse sich damit erklären, dass die Dichte der für die Eiskeimbildung günstigen Stellen auf der Oberfläche der Impfsubstanzen recht gering ist. Um eine befriedigende theoretische Interpretation des Verlaufs von  $q(T)$  finden zu können, bedarf es jedoch vorgängig noch weiterer experimenteller Untersuchungen.



Abschliessend sei dem Leiter des Laboratoriums für Atmosphärenphysik, Herrn Prof. Dr. R. SÄNGER, für die Anregung zu dieser Arbeit und sein stetes Interesse an deren Fortgang gedankt. Des Dankes versichert seien auch Herr M. BAUD für die erwähnte Mitwirkung sowie die Herren Prof. Dr. G. BUSCH, Prof. Dr. W. EPPRECHT, Prof. Dr. F. LAVES, Prof. Dr. B. MARINCEK und deren Mitarbeiter, die für die Herstellung und kristallographischen Untersuchungen der Substanzen ihre Apparaturen zur Verfügung stellten und mit Ratschlägen zur Seite standen. Die finanziellen Mittel für die Durchführung der Untersuchungen sind in verdankenswerter Weise von der Schweizerischen Forschungskommission zugesprochen worden.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Amer. Soc. test. Mat. (ASTM-Kartei Nr. 6-0464).
- [2] BRÜESCH, P., Z. angew. Math. Phys. 10, 519 (1959).
- [3] FLETCHER, N. H., J. Met. 16, 173 (1959).
- [4] FUKUTA, N., J. Met. 15, 17 (1958).
- [5] GMELIN, Handb. d. anorg. Chemie, Bd. Kupfer (1955).
- [6] HOSLER, C. L., and SPALDING, G. R., in: H. WEICKMANN and W. SMITH, *Artificial Stimulation of Rain* (Pergamon Press, London 1957).
- [7] LIST, R., Helv. Phys. Acta 29, 424 (1956).
- [8] PRUPPACHER, H. R., und SÄNGER, R., Z. angew. Math. Phys. 6, 407 (1956).
- [9] SANO, I. et al., J. met. Soc. Japan, Ser. II 34, 104 (1956).
- [10] SERPOLAY, R., Bull. Obs. Puy de Dôme 1959, 81.
- [11] SMITH, E. J., and HEFFERNAN, K. J., Quart. J. Roy. Met. Soc. 80, 182 (1954).
- [12] SOULAGE, G., Bull. Obs. Puy de Dôme 1955, 1.
- [13] *Tables pour la détermination des minéraux au moyen des rayons X* (Lisbonne 1953).

### Summary

The icing nucleability of  $\text{Cu}_2\text{O}$ ,  $\text{CuO}$ ,  $\text{Cu}_2\text{S}$ ,  $\text{Cu}_9\text{S}_5$ , and  $\text{CuS}$  has been measured as a function of the temperature. After a short description of the way in which the substances were prepared, the measuring apparatus is explained. *Figure 1* shows the cloud chamber with a particular small temperature gradient and the apparatus with which a supercooled cloud is first produced in the chamber, before the seeding substance from the disperser (*Figure 2*) is injected into the cloud by means of the dosing instrument. The fall-out of ice crystals is observed visually and their number estimated. The concentration of the seeding particles is obtained through a sedimentation tube (*Figure 2*). The size distribution of the particles is represented in *Figure 3*, and it should be noted that no diameter of less than  $0.5 \mu$  occurs. *Figures 4* and *5* show the activity in terms of icing nucleability  $q$ , which is defined as the ratio of observed ice crystals to the number of nuclei injected into the cloud. A brief comparison is made of these measurements with the theory of FLETCHER [3] concerning the dependence of particle size on the threshold temperature, and with the experiments of other authors. The only explanation attempted of the differences which have been established here has been for the time being in qualitative terms. The threshold temperatures of the substances in question are ( $\pm 0.5^\circ\text{C}$ ),  $\text{Cu}_2\text{O}$ :  $-4.2^\circ\text{C}$ ,  $\text{CuO}$ :  $-13.5^\circ\text{C}$ ,  $\text{CuS}$ :  $-5.1^\circ\text{C}$ ,  $\text{Cu}_9\text{S}_5$ :  $-5.7^\circ\text{C}$ ,  $\text{Cu}_2\text{S}$ :  $-6.4^\circ\text{C}$ .

(Eingegangen: 21. Dezember 1959.)

## Über die Trennung von Gasgemischen in laminarer Strömung

VON JANEZ STRNAD, Ljubljana, Jugoslawien<sup>1)</sup>

Es wird eine nur vom theoretischen Standpunkte aus interessante Möglichkeit für die Trennung von Komponenten eines Gasgemisches betrachtet.

Für ein laminar (Reynoldssche Zahl  $Re < 2000$ ) durch ein langes Rohr mit dem Durchmesser  $2r_0$  strömendes Gas ist die Geschwindigkeit mit

$$v(r) = v(0) \left( 1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)$$

gegeben.

Als Folge der inneren Reibung wird in der Strömung pro Zeiteinheit und Volumeneinheit [1]<sup>2)</sup>

$$p = \mu \left( \frac{dv}{dr} \right)^2 = 4 \mu v^2(0) \frac{r^2}{r_0^4}$$

kinetische Energie in Wärme umgewandelt ( $\mu$  Zähigkeit). Wenn die Wärmeleitung in der Strömungsrichtung vernachlässigt wird, folgt aus der Wärmeleitungsgleichung für den stationären Fall

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{p}{\lambda} = -4 \mu v^2(0) \frac{r^2}{\lambda r_0^4}$$

( $\lambda$  Wärmeleitfähigkeit). Daraus ergibt sich für den Verlauf der absoluten Temperatur

$$T(r) = T(r_0) + \frac{\mu v^2(0)}{4 \lambda} \left( 1 - \frac{r^4}{r_0^4} \right),$$

wobei die Rohrwandtemperatur  $T(r_0)$  als durchwegs konstant angenommen wurde.

Wenn die Strömung hydrodynamisch (Knudsensche Zahl  $Kn < 0,1$ ) ist, bringt die mit  $T(r)$  bedingte Thermodiffusion ein Konzentrationsgefälle zustande. In einem binären Gasgemisch, in dem  $n(r)$  der Molenbruch der schwereren Komponente ist, ergibt sich [2] im stationären Zustand die Gleichung

$$\frac{n(r)}{1-n(r)} = \frac{n(r_0)}{1-n(r_0)} \left[ 1 + \frac{\mu v^2(0)}{4 \lambda T(r_0)} \left( 1 - \frac{r^4}{r_0^4} \right) \right]^{-\sigma},$$

wobei  $\sigma$  der Thermodiffusionsfaktor ist. Da im allgemeinen das zweite Glied in der grossen Klammer sehr klein ist, kann der Ausdruck in eine Potenzreihe entwickelt werden. Wenn man nur die ersten zwei Glieder beibehält und noch die Konstante  $c = (\kappa \mu R)/(4 \lambda M)$  und die Machsche Zahl  $Ma = v(0) [M/\kappa R T(r_0)]^{1/2}$  einführt, hat man

$$n(r) = n(r_0) - n(r_0) [1 - n(r_0)] c \sigma Ma^2 \left( 1 - \frac{r^4}{r_0^4} \right)$$

( $\kappa$  Adiabatenexponent,  $M$  mittleres Molekulargewicht). In den meisten Gemischen

<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der Universität.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 246.

( $\sigma > 0$ ) wird die schwere Komponente am Rande der Strömung angereichert. Der Elementareffekt der Trennung  $\varepsilon_A = n(r_0) [1 - n(0)] \{n(0) [1 - n(r_0)]\}^{-1}$  beträgt

$$\varepsilon_A = c \sigma M a^2.$$

Beim Gemisch zweier Isotope mit den Molekulargewichten  $M_2$  und  $M_1$  [3] ist  $\sigma$  von der Grössenordnung  $0,89 (M_2 - M_1)/(M_2 + M_1)$  und hat  $\varepsilon_A$  somit die Grössenordnung  $0,1 (M_2 - M_1) M a^2/(M_2 + M_1)$ . Es wäre nicht zweckmässig, diesen Effekt praktisch auszunützen, da andere Trennverfahren<sup>3)</sup> weit grössere Trenneffekte aufweisen.

Einen Trenneffekt in laminarer Strömung hat TOLLERT [4] experimentell nachgewiesen. Seine Experimentalbedingungen unterscheiden sich aber von unseren Annahmen.

Tafel von  $c$  [5]

Gas	He	A	H <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	CO <sub>2</sub>	NH <sub>3</sub>
$c$	0,112	0,114	0,070	0,075	0,073	0,059	0,068

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] N. J. KOTSCHIN, I. A. KIBEL und N. W. ROSE, *Theoretische Hydromechanik* II. Teil (Akademie-Verlag, Berlin 1954), S. 271.
- [2] S. CHAPMAN and T. G. COWLING, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases* (Cambridge 1939), S. 244, Gl. (14, 1, 1).
- [3] R. C. JONES and W. N. FURRY, *Rev. Mod. Phys.* 18, 151 (1946).
- [4] H. TOLLERT, *Z. Elektrochem.* 61, 1224 (1957).
- [5] E. H. KENNARD, *Kinetic Theory of Gases* (McGraw-Hill, New York 1938), S. 180, 252.

#### Summary

The separation effect in a gas mixture laminary and hydrodynamically flowing through a cylindrical pipe with constant wall temperature is calculated.

(Eingegangen: 30. November 1959).

<sup>3)</sup> Bei der Diffusion durch poröse Membranen hat zum Beispiel der Elementareffekt der Trennung maximal den Wert  $(M_2 - M_1)/(M_2 + M_1)$ .

**Handbuch der Physik - Encyclopedia of Physics.** Herausgegeben von S. FLÜGGE, Band 52: *Astrophysik*, III: *Das Sonnensystem* (Springer-Verlag, Berlin 1959). 601 S., 225 Abb.; DM 148.—.

Von den 600 Seiten des vorliegenden, die Körper des Sonnensystems behandelnden Bandes sind 362 der Sonne gewidmet. Der einleitende, 79 Seiten umfassende Abschnitt von GOLDBERG und PIERCE über die Photosphäre gibt eine erschöpfende Darstellung des kontinuierlichen und des Linienspektrums der Sonne, wobei das Schwergewicht auf den Beobachtungen liegt; theoretische Untersuchungen, die schon in einem früheren Band ihre Darstellung gefunden haben, werden nur so weit beigezogen, als es für die Interpretation und insbesondere für die Erschliessung des Aufbaues der Photosphäre notwendig ist. Das Kernstück des Bandes bildet der von DE JAGER verfasste 283 Seiten starke Beitrag über die Struktur und Dynamik der Sonnenatmosphäre. Das Gebiet ist so weit gespannt, dass ein einzelner Forscher nur einen kleinen Teil desselben aus eigener Tätigkeit kennen kann, im übrigen auf das Literaturstudium angewiesen ist. Trotzdem zeichnet sich der Artikel durch bemerkenswerte Vollständigkeit und Homogenität aus. Der Autor hat, auch auf ihm ferner liegenden Gebieten, mit sicherem Instinkt stets die wesentlichen Punkte hervorgehoben und auch russische Arbeiten nicht übersehen. Wenn man auch dafür Verständnis haben kann, dass der Autor im wesentlichen nur die Literatur ab 1953 zitiert, so hätte man doch die diesbezügliche Bemerkung lieber am Anfang gesehen, denn es gibt auch heute noch Leute, welche einen Artikel vorne zu lesen beginnen; auch hätte dadurch manchem Missverständnis, wo der Leser statt des Namens eines Pioniers denjenigen seiner Epigonen findet, vorgebeugt werden können. Abbildung 47 ist voll innerer Widersprüche, und in der unglücklichen Abbildung 92 ist durch Umkopieren nach Belieben Schwarz zu Weiss und Weiss zu Schwarz gemacht. Trotzdem: alles in allem ein ausgezeichnete Beitrag, der durch seine einfache Sprache auch den Lesern nichtenglischer Zunge leicht zugänglich ist. Die nachfolgenden kurzen Kapitel behandeln die Atmosphären der Planeten (H. C. UREY), den inneren Bau der Planeten (W. C. DE MARCUS), die Radioechos vom Mond (F. J. KERR), die Kometen (K. WURM) und die Meteore (F. L. WHIPPLE).

Bedauerlich ist, dass der Mond aus dem schön ausgestatteten Band verbannt ist, erfreulich, dass derselbe mit nur wenigen Monaten Verspätung auf die neuesten darin zitierten Arbeiten erscheinen konnte.

M. WALDMEIER

**Atlas of Gamma-Ray Spectra from Radiative Capture of Thermal Neutrons.** Von L. D. GROSHEV, N. LUTSENKO, A. M. DEMODOV und V. I. PELEKHOV. Aus dem Russischen übersetzt von J. B. SYKES (Pergamon Press, London 1959). 198 S., 142 Abb.; \$20.—.

Die russischen Autoren haben keine Mühe gescheut, sämtliche bekannten Gammaspektren, die durch Einfang thermischer Neutronen entstanden sind, nach Elementen zu ordnen. Für dieses Vorhaben sind sie besonders ausgezeichnet, da gerade aus dieser Forschungsgruppe viele wertvolle Beiträge herrühren, die aus Messungen mit einem Compton-Spektrometer stammen. Das Einfangs-Gammastrahlenspektrum ist in der Regel sehr komplex. Die magischen Kerne mit abgeschlossenen Schalen und einige leichte Kerne bilden eine Ausnahme. Die Kenntnis der Spektren und besonders der Intensitätsverhältnisse sind für viele Arbeiten an



einem Reaktor ausschlaggebend. Dieser Atlas ist daher an jedem Reaktor ein unentbehrlicher Ratgeber. Der Kernphysiker findet darin viele Zerfallsschemas, die er sonst mühselig in den verschiedensten Handbüchern herausuchen müsste. Im Anhang sind einige Spektren von Konversionselektronen aufgeführt, die ebenfalls nach Einfang thermischer Neutronen entstehen. Eine sorgfältige Zusammenstellung der Literatur auf diesem Arbeitsgebiet bietet auch dem Spezialisten viel Anregung. Als wertvolles Nachschlagewerk dürfte dieser Atlas seine Aufgabe voll und ganz erfüllen.

P. STOLL

**Handbook of Probability and Statistics with Tables.** Von R. S. BURLINGTON und D. C. MAY, Jr. (McGraw-Hill Book Company, New York 1959). 332 S., 53 Fig.; \$ 6.—.

Dieses schon 1953 durch die Handbook Publishers (Sandusky, Ohio) herausgegebene kleine Handbuch wurde kürzlich von der McGraw-Hill Book Company übernommen. Da es sich auf die Beschreibung der gebräuchlichsten Methoden der mathematischen Statistik beschränkt, hat es seit seinem ersten Erscheinen kaum an Bedeutung verloren. Die Verfasser wenden sich sowohl an den Studierenden der mathematischen Statistik als auch an den praktisch tätigen Statistiker. Indem sie uns einen Überblick über die wichtigsten Zusammenhänge geben, berichten sie zugleich alles, was man zur korrekten Anwendung der besprochenen Methoden wissen muss. Theorie und Anwendung sind dabei geschickt verknüpft, und die mathematischen Begriffe und Beziehungen sind elegant erklärt. Sehr wertvoll wäre ein ausführlicher Literaturnachweis gewesen.

Einige Kapitelüberschriften mögen den Inhalt andeuten: *Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung, Verteilungsfunktionen, Prüfverfahren und Vertrauensgrenzen, Korrelationsrechnung, Zeitserien, Streuungszerlegung, Fortschreitende Probenahme, Qualitätskontrolle*. Neben den üblichen Tafeln für  $t$ -,  $F$ - und  $\chi^2$ -Test finden wir eine Anzahl nützlicher Tabellen. Spezielle Erwähnung verdienen die ausführlichen Tafeln für Binomial-, Poisson- und Normalverteilung.

P. SCHMID

**Basic Physics of Atoms and Molecules.** Von U. FANO und Mrs. L. FANO (John Wiley & Sons, New York 1959). 414 S., 86 Fig.; \$ 10.—.

Das vorliegende Buch postuliert in der Einleitung eine Lücke im vorhandenen Schrifttum, die es nun ausfüllen will. Die Lücke besteht im Mangel an Werken, welche eine Einführung und ein *Verständnis* für die Mikrophysik und ihren Zusammenhang mit den gewohnten Eigenschaften makroskopischer Objekte geben.

Das Haupthindernis für das Eindringen in das Gebiet der Quantentheorie sehen die Autoren wohl mit Recht in dem dazu erforderlichen mathematischen Apparat.

Unter diesen Voraussetzungen gehen die Autoren zum Teil eigenwillige Wege. So werden wichtige quantenmechanischen Tatsachen zunächst für diskrete Situationen (Quantisierung des Drehmomentes) illustriert. Nun ist das Diskrete allerdings begrifflich einfacher als das Kontinuierliche, doch folgt daraus nicht notwendig, dass es zur Einführung besser geeignet ist.

Die Autoren machen sich ihre Aufgabe nicht leicht, indem sie ihre eigenen Wege gehen. Das Buch ist durchaus sorgfältig geschrieben und behandelt neben dem üblichen Stoff der Atomphysik zur Hauptsache noch die chemische Bindung. Eine Reihe von Anhängen sind der Ergänzung der mathematischen Hilfsmittel gewidmet.

Das Werk richtet sich in erster Linie an Fachleute aus den Nachbarwissenschaften zur Physik, ausgenommen an Mathematiker, also etwa an Chemiker und Biologen.

R. JOST



## Voranzeige

*Mathematische Reihe, Band 25 und 26*

*Sammlung «Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften»*

ACZÉL

# Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen

Von Prof. Dr. J. Aczél, Professor an der Universität Debrecen (Ungarn). Ca. 320 Seiten mit 14 Figuren. Preis gebunden ca. Fr./DM 40.–

**Inhalt:** Inhaltsverzeichnis. Einleitung. – **Erster Teil:** Gleichungen für Funktionen von einer Veränderlichen: 1. Gleichungen, in denen Veränderliche nicht nur unter Funktionenzeichen vorkommen. 2. Gleichungen mit lauter inneren Veränderlichen. 3. Gleichungen mit mehreren unbekannten Funktionen. 4. Zurückführung auf Differential- und Integralgleichungen. – **Zweiter Teil:** Gleichungen für Funktionen mehrerer Veränderlicher: 5. Einfache Gleichungen. 6. Zusammengesetzte Gleichungen. 7. Gleichungen mit mehreren unbekannten Funktionen mehrerer Veränderlicher. Zurückführung auf partielle Differentialgleichungen. 8. Vektoren- und Matrizengleichungen. – Schlussbemerkungen. Einige ungelöste Probleme. – Literaturverzeichnis.

Das vorliegende Buch ist das erste, das ein grosses Gebiet der Theorie der Funktionalgleichungen zusammenfassend bearbeitet. Die grossen Anwendungsgebiete, insbesondere Wahrscheinlichkeitstheorie (nichteuclidische) Geometrie und Mechanik, werden auch eingehend behandelt. Das Literaturverzeichnis, das mehr als 1000 Arbeiten aufzählt, will gewissermassen auch als Bibliographie dieses Gebietes dienen.

KOWALSKY

# Topologische Räume

Von Prof. Dr. H.-J. KOWALSKY, Professor an der Universität Erlangen  
Ca. 240 Seiten, Preis ca. Fr./DM 35.–

**Inhalt:** I. Grundlagen: Mengen, Verbände, Filter. II. Topologische Räume: Zusammenhang zwischen Topologie und Grenzwert, Grundbegriffe, Trennungseigenschaften, Mächtigkeitsbedingungen. III. Kompaktheit und Zusammenhang (einschliesslich lokaler Begriffe und parakompakter Räume). IV. Abbildungen: Stetige, offene und abgeschlossene Abbildungen, Homöomorphie, vollständig reguläre Räume, Quotienten-, Produkt-, Summen- und Abbildungsräume. V. Erweiterung und Kennzeichnung topologischer Räume: Allgemeines Erweiterungsprinzip, Kompaktifizierung, Einbettungs- und Darstellungssätze. VI. Metrische und uniforme Räume: Metrisierung, Gleichmässigkeit, Vervollständigung. VII. Topologische Gruppen, Anwendungen: Grundbegriffe aus der Theorie der topologischen Gruppen, Ringe, Körper und Vektorräume, Approximationssatz von Stone-Weierstrass, induktiver und inverser Limes.

Das vorliegende Lehrbuch soll in die mengentheoretische Topologie einführen. Ausgangspunkt ist eine Verallgemeinerung des Grenzwertbegriffs, die einen natürlichen Zugang zu den topologischen Räumen vermittelt. Kennzeichen für die Darstellung ist die weitgehende Verwendung der Filter, die nicht nur eine übersichtliche Schreibweise und Begriffsbildung, sondern auch eine formale Beweisführung ermöglichen. Die Stoffauswahl wird durch Hinweise und Aufgaben am Ende eines jeden Paragraphen ergänzt.

*Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung – Obtainable from your bookseller – Commandes à votre libraire*

BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL UND STUTTGART

# Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung

In drei Bänden, von A. OSTROWSKI, Professor an der Universität Basel

Zum Gebrauch bei akademischen Vorträgen sowie zum Selbststudium

Mathematische Reihe, Band 4, 5 und 7 – Sammlung «Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften»

Soeben erschienen:

## Band I: Funktionen einer Variablen

Zweite, neubearbeitete Auflage. 330 Seiten mit 47 Figuren. Preis Fr./DM 35.– (1960)

In der neuen Auflage haben die beiden ersten Bände gewisse strukturelle Änderungen erfahren. Um den ersten Band, mit dem erfahrungsgemäss für manche Studierende der Lehrgang der Infinitesimalrechnung abgeschlossen wird, in sich abgerundet zu machen, wurden aus dem zweiten Band die Elemente der Reihenlehre und einige Grundtatsachen der Differentialgeometrie herübergenommen.

*Inhalt:* Wesen der Mathematik. *I. Grundbegriffe:* § 1. Die Grundeigenschaften reeller Zahlen. § 2. Erste Folgerungen aus den Grundeigenschaften reeller Zahlen. § 3. Weitere Folgerungen aus den Grundeigenschaften. § 4. Der Funktionsbegriff. *II. Grenzwerte:* § 5. Nullfolgen. § 6. Grenzwerte von Zahlenfolgen. § 7. Spezielle Sätze über Konvergenz von Zahlenfolgen. § 8. Unendliche Reihen. § 9. Grenzwerte von Funktionen eines stetigen Arguments. *III. Stetige Funktionen einer Variablen und bestimmte Integrale:* § 10. Stetige Funktionen. § 11. Trigonometrische Funktionen. § 12. Definition des bestimmten Integrals. § 13. Elementare Eigenschaften des bestimmten Integrals. *IV. Der Begriff der Ableitung und die Fundamentalsätze der Infinitesimalrechnung:* § 14. Die Ableitung. § 15. Der Zusammenhang zwischen der Ableitung und dem Differenzenquotienten einer Funktion. § 16. Die Fundamentalsätze der Infinitesimalrechnung. *V. Die Technik des Differenzierens:* § 17. Ableitungen rationaler Verbindungen gegebener Funktionen. § 18. Umkehrung monotoner Funktionen. § 19. Die Kettenregel und ihre Anwendungen. *VI. Die Technik des Integrierens:* § 20. Integralumformung durch partielle Integration und Variablensubstitution. § 21. Logarithmus und Exponentialfunktion. § 22. Anwendungen der Logarithmus- und der Exponentialfunktion. § 23. Integration rationaler Funktionen. *VII. Erste Anwendungen der Differentialrechnung auf die Geometrie und die Funktionen-Diskussion:* § 24. Anwendungen der ersten Ableitung. Monotonie. § 25. Anwendungen der ersten Ableitung. Extrema. Unbestimmte Ausdrücke. § 26. Die zweite Ableitung. Der Funktionsverlauf im Grossen. § 27. Darstellung von Kurven in der Ebene und im Raum. § 28. Bogenlänge. § 29. Entwicklung des Logarithmus und des Arcustangens. § 30. Die Taylorsche Formel. § 31. Entwicklungen von  $e^x$ ,  $\sin x$  und  $\cos x$ .

## Band II: Differentialrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen

484 Seiten mit 55 Figuren. Leinen Fr./DM 67.– (1951)

*Inhalt:* Unendliche Mengen – Funktionen auf Mengen – Unendliche Folgen und Reihen – Ergänzungen zur Differentialrechnung – Anwendungen der Differentialrechnung auf die Analysis – Numerische Rechenmethoden – Bogenlänge – Ebene Kurven – Raumkurven und Flächen.

## Band III: Integralrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen

475 Seiten mit 36 Figuren. Ganzleinen Fr./DM 75.– (1954)

*Inhalt:* Ergänzungen zur Integrationstechnik – Begriff des mehrfachen Integrals – Berechnung mehrfacher Integrale – Anwendungen mehrfacher Integrale – Einfache uneigentliche Integrale – Mehrfache uneigentliche Integrale und die Gammafunktion – Fourier-Reihe und Fourier-Integrale.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung – Obtainable from your bookseller – Commandes à votre libraire

BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL UND STUTTGART